Carlo Felice MANARA.
Cenni di calcolo delle probabilità.
Corso di perfezionamento in didattica della matematica.
Brescia. Dipartimento di matematica della Università Cattolica "S.Cuore".
Anno Accademico 1991/92.

INTRODUZIONE.

1 - Le pagine che seguono sono state scritte nell'intento di facilitare il lavoro degli insegnanti della scuola italiana, che debbono svolgere il capitolo di "Calcolo delle probabilità" prescritto dai nuovi programmi. Esse non pretendono di essere un trattato completo di calcolo delle probabilità ma mirano a chiarire alcuni concetti che a noi sembrano fondamentali, e che non sempre appaiono esposti chiaramente nella manualistica corrente.

2 - Si può constatare infatti che è molto diffuso l'abitudine di dare una definizione verbale esplicita del concetto di "probabilità" di un evento aleatorio, riproducendo pedissequamente le frasi che il grande Laplace scrisse in un suo celebre saggio. Sulla scia di questo atteggiamento, i capitoli dei manuali per la scuola (elementare, media inferiore e media superiore) che sono dedicati al calcolo delle probabilità sono infarciti di esercizi e di esempi che si riducono ad esercizi ed esempi di combinatorica; esercizi spesso ingegnosi, eleganti ed originali,ma che non hanno molto a che vedere con il calcolo delle probabilità nella visione dei grandi che lo hanno fondato e che noi cerchiamo di esporre in queste pagine.

3 - Pare a noi di poter dire che il nostro atteggiamento di diffidenza e perplessità di fronte alle presentazioni che partono dicendo : " La probabilità di un evento aleatorio è....(e qui una frase accompagnata da una formula)" sia giustificata dalla moderna critica dei fondamenti, la quale preferisce alle definizioni verbali e nominalistiche le definizioni d'uso, che presentano i concetti attraverso certi postulati, dai quali il Lettore o l'ascoltatore desumeranno autonomamente la definizione dei concetti presi in considerazione; definizione che gli assiomi danno soltanto sotto forma implicita.

4 - Coerentemente con questo atteggiamento, che a noi, ripetiamo, sembra giustificato dai risultati della moderna critica, non abbiamo presentato una definizione esplicita e nominalistica della probabilità di un evento, ma abbiamo soltanto cercato di precisare quale sia il significato del giudizio di probabilità espresso da un soggetto razionale, in relazione ad un evento sul quale esso non ha informazioni complete. Tale significato è, nella nostra impostazione, precisato implicitamente dal comportamento del soggetto.

5 - Il lettore avvertito riconoscerà l'analogia di questo nostro atteggiamento con quello della teoria che viene chiamata "soggettiva", e che annovera tra i suoi fondatori il grande matematico italiano De Finetti [Bruno De Finetti. 1906-1985]. A nostro parere questa teoria non soltanto rispetta i risultati della moderna critica rigorosa dei fondamenti, ma si adatta molto bene alla realtà del comportamento umano razionale nei riguardi dei fatti economici; essa infatti permette di tener conto in modo fondamentale delle informazioni che un soggetto possiede inizialmente o acquisisce, e sulle quali egli orienta le proprie scelte.

E la possibilità di questo stretto collegamento con l'informazione è un'ulteriore ragione che ci ha spinto ad adottare l'atteggiamento che abbiamo scelto e che ispira la nostra trattazione.

6 - Il richiamo all'informazione ci offre l'occasione per una piccola osservazione riguardante le espressioni con le quali spesso il calcolo delle probabilità viene presentato: capita infatti di leggere delle frasi come "matematica dell'incerto" o altre consimili. Noi abbiamo preferito qui parlare di "informazione incompleta", perché pensiamo che la certezza o l'incertezza siano degli stati d'animo, che dipendono anche dalla costituzione psicologica di un individuo umano, e dalla situazione in cui egli si trova. Pertanto la certezza o l'incertezza sono soltanto gli effetti della mancanza di informazione su un determinato evento, ma possono anche essere determinate dalla sua psicologia; invece ci pare di poter dire che il concetto di informazione possa essere giudicato più legato alle situazioni obiettive.

7 - Abbiamo quindi cercato di presentare il calcolo delle probabilità come una teoria che mira a guidare le scelte economiche che un essere umano deve fare, quando si trovi in condizioni di informazione incompleta, e quando cerchi di raggiungere la massima razionalità e di sfruttare al meglio le informazioni che via via riesce ad ottenere.

Come è noto, nell'impostazione da noi scelta è possibile dimostrare tutte le proposizioni fondamentali che vengono dimostrate nell'impostazione classica; crediamo tuttavia che queste dimostrazioni siano conseguite in modo più semplice e razionale. Ma non pretendiamo con questo di giudicare negativamente chi la pensi in modo diverso dal nostro: pensiamo infatti che la formazione matematica dei discenti debba soprattutto mirare a formare in essi l'abitudine alla analisi critica dei fondamenti del pensiero, e delle procedure di deduzione. La scelta dei punti di partenza può dipendere dai gusti e dalla formazione culturale di chi costruisce una teoria: ciò che ci sembra veramente importante è l'enunciazione esplicita dei punti di partenza e il rigore della deduzione.

I I CONCETTI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITA' PROBLEMI LOGICI ED EPISTEMOLOGICI.

1 - Termini come "impossibile, possibile, certo, incerto, probabile, improbabile" e simili fanno parte del linguaggio comune quotidiano; come avviene quasi sempre, il loro significato non è sempre costante, e dipende in larga misura dal contesto nel quale essi sono inseriti. Pertanto, quando si voglia adattare un termine del linguaggio comune all'uso scientifico, occorre precisare rigorosamente il suo significato e definire con precisione il concetto designato col termine stesso.

Nelle pagine che seguono cercheremo di ottenere questo risultato con il termine "probabilità", per poterne definire con precisione il significato e quindi poter utilizzare i simboli e gli strumenti concettuali della matematica nelle deduzioni che si faranno.

2 - La nascita del calcolo delle probabilità può essere considerata come un evento molto importante nella storia del pensiero scientifico. Infatti, nella concezione comune ed abituale, la matematica è sempre stata considerata come la scienza che fornisce il paradigma della chiarezza e della certezza: può dunque essere considerato come un paradosso il fatto che si possa dare una teoria matematica degli eventi incerti. L'apparente e superficiale paradosso presentato in questa forma viene risolto facilmente quando si pensi che la matematica garantisce il rigore della deduzione; ma quando essa viene applicata al reale essa non può garantire la verità delle proposizioni che si enunciano e che riguardano il reale stesso; in altre parole la matematica garantisce la connessione formale ineccepibilmente coerente tra le proposizioni o le formule, ma non può garantire la rispondenza dei contenuti delle proposizioni o delle formule alla realtà materiale esterna a sè stessa.

Pertanto la nascita del calcolo delle probabilità non può essere considerata come l'applicazione della matematica per costruire delle certezze dove non è possibile, per mancanza di informazioni, ma l'utilizzazione della matematica per raggiungere il massimo di certezza e di razionalità in condizioni di informazione incompleta.

3 - Abbiamo accennato all'informazione perché ci pare che questo concetto sia essenziale per la precisa comprensione dei concetti e delle procedure che verranno presentati nel seguito. Invero si vede spesso presentare il calcolo delle probabilità come "la matematica dell'incerto" o con espressioni analoghe. Noi preferiamo non adottare i concetti di certezza o incertezza per definire il calcolo delle probabilità, ma parlare piuttosto di informazione completa o incompleta. Noi pensiamo infatti che la certezza o l'incertezza siano degli stati psicologici, che possono quindi dipendere anche da situazioni emotive e da giudizi non perfettamente razionali, e comunque possono variare nel tempo. Per esempio ci può essere il superficiale beota che si crede ottimista e che è certo che qualunque suo comportamento, anche imprudente, avrà ottimi risultati; e ci può essere il nevrotico ansioso che non riesce a raggiungere la certezza su nulla o

quasi nulla. Invece crediamo che sia l'informazione, sufficiente o incompleta, che determina la certezza o l'incertezza: per esempio noi possediamo tali e tante informazioni sulle leggi astronomiche che reggono i pianeti che i fenomeni relativi non hanno più alcun margine di incertezza per noi; potrebbero invece averlo per certe popolazioni per le quali, ancora oggi, le eclissi di sole o di luna sono dei fenomeni imprevedibili. Analogamente, noi conosciamo molte leggi che regolano i fenomeni atmosferici ma non siamo ancora in grado di conoscerli talmente a fondo da poter prevederli con certezza assoluta; essi quindi presentano per noi un margine di incertezza, dovuta alla incompletezza delle informazioni che possediamo.

Tuttavia è ben noto che il margine di incertezza che ancora sussiste per noi a riguardo dei fenomeni meteorologici va riducendosi giorno per giorno, a causa dei progressi dei mezzi di informazione e delle conoscenze scientifiche che li riguardano.

4 - Le origini del calcolo delle probabilità vengono abitualmente fatte risalire al secolo XVII, ed il merito di aver fatto nascere questa branca della matematica viene di solito attribuito ad alcuni grandi matematici dell'epoca. Ricordiamo in particolare il nome di Huygens [Christiaan Huygens.1629-1695] il quale scrisse un saggio (in latino, come si usava allora per le opere di scienza) intitolato "De rationibus in ludo aleae"; titolo che potrebbe essere tradotto, non letteralmente, ma rispettando il senso, con la frase:"Introduzione di procedimenti razionali nel gioco dei dadi". Anche due altri grandi matematici del secolo sono annoverati tra i fondatori del calcolo delle probabilità: si tratta di Pascal [Blaise Pascal.1623-1662] e di Fermat [Pierre de Fermat.1601-1665]. In particolare si suole ricordare che Pascal iniziò la sue riflessioni sui fenomeni casuali a seguito delle domande che gli erano state rivolte da un amico, il cavaliere de Méré [Antoine Gombaud cavaliere de Méré.1607-1684] a proposito di certi risultati nel gioco dei dadi.

5 - Da ciò che abbiamo detto poco sopra si comprende come il calcolo delle probabilità sia stato collegato, all'epoca del suo nascere, con i giochi d'azzardo; questa circostanza ancora oggi induce spesso ad una visione abbastanza limitata di questa branca della matematica e soprattutto ha influenzato ed influenza la soluzione del problema logico ed epistemologico della definizione del concetto di probabilità.

La visione più moderna è molto più vasta, ed abbraccia un orizzonte molto più ampio di quello iniziale, ed ancora oggi adottato da molti. Infatti oggi si considera il calcolo delle probabilità come la teoria fondamentale atta a dirigere il comportamento economico dell'uomo in condizioni di informazione incompleta. Ora le scommesse riguardanti i giochi d'azzardo sono solo una minima parte dei contratti che vengono stretti quotidianamente; esiste invece una intera importantissima branca dell'Economia che riguarda contratti stipulati in condizioni di informazione incompleta: si tratta dell'industria delle assicurazioni, che riguarda una parte non indifferente del giro di denaro globale delle nazioni civili di oggi.

Pertanto il calcolo delle probabilità non riguarda soltanto dei divertimenti infantili, e non analizza soltanto i problemi degli scommettitori e dei giocatori d'azzardo, ma costituisce oggi una branca importantissima della matematica applicata: precisamente una branca della matematica che fornisce gli strumenti concettuali e simbolici per introdurre il massimo di razionalità nelle scelte economiche. Esso ha quindi una parte importantissima nell'Economia matematica, così come la ha la Statistica, vista come scienza che procura ed elabora certe informazioni che debbono servire come punti di partenza per le scelte economiche in condizioni di informazione incompleta.

6 - Abbiamo detto che la visione relativamente ristretta, offerta dalla casistica poco estesa dei giochi e delle scommesse, ha anche portato le sue conseguenze sulla soluzione dell'importante problema della definizione del concetto di probabilità.

Si potrebbe osservare che la tentazione di un certo nominalismo formale è stata ed è abbastanza influente sugli animi degli scienziati. Per esempio per secoli anche i matematici più sottili hanno accettato delle frasi del tipo " Il numero è....", oppure "Il punto è....". Quest'ultimo atteggiamento è giustificato dai precedenti storici illustri: è noto infatti che il primo trattato matematico rigoroso che la storia ricordi, il trattato degli "Elementi" di Euclide, inizia proprio con una frase di questo tipo. Si può invero osservare che essa dovrebbe essere considerata più come una descrizione che come una definizione logicamente rigorosa; e ciò, a nostro parere, è provato dal fatto che nessun teorema di Euclide si basa su argomenti che richiamano la frase iniziale. Si potrebbe quindi concludere che questa ha bensì l'aspetto esteriore della definizione di tradizione scolastica ma non è una vera definizione, atta a precisare la natura dell'ente di cui si parla. Tuttavia l'autorità della tradizione e la forza dell'abitudine sono tali che molti non si ritengono soddisfatti se non memorizzano delle frasi del tipo di quelle ricordate. Soltanto la critica dei fondamenti della matematica, sviluppatasi nel secolo scorso, ha portato ad accettare la tecnica delle definizioni per postulati o definizioni d'uso. Per esempio Peano [Giuseppe Peano. 1858-1932], nella fondamentale memoria in cui ha analizzato i fondamenti dell'aritmetica, scritta in latino con titolo "Arithmetices principia nova methodo exposita", non scrive una frase del tipo "Il numero è...", ma enuncia 5 postulati che parlano del numero; postulati che forniscono la definizione implicita di questo concetto. Analogo atteggiamento è stato assunto nei riguardi della geometria da Hilbert [David Hilbert.1862-1943] nella sua opera sui fondamenti di questa scienza, intitolata "Grundlagen der Geometrie".

7 - Ciò che è stato detto poco sopra a proposito delle definizioni dei concetti fondamentali della matematica e della geometria può essere trasportato, con grande analogia, anche nell'ambito del calcolo delle probabilità. Come abbiamo già detto, forse la ristrettezza del numero dei

casi presi in considerazione, o la tradizione plurisecolare di cui abbiamo detto, hanno accreditato una nota frase che viene presentata spesso come la definizione del concetto di probabilità di un evento con riferimento al numero dei casi favorevoli all'evento ed al numero dei casi possibili; tale frase si incontra nel noto e fondamentale saggio di Laplace [Pierre Simon (marquis de) Laplace.1749-1827], intitolato "Essai philosophique sur les probabilités".
Ritorneremo in seguito (Cap. VIII) su questo argomento. Qui ci limitiamo ad osservare che, nel cercare di definire il concetto di probabilità, preferiamo seguire l'atteggiamento moderno il quale, come si è detto, evita le frasi del tipo :" La probabilità di un evento è......." ma preferisce enunciare le regole d'uso del concetto ed enunciare i postulati relativi; nel nostro caso si tratterà del cosiddetto "Principio di coerenza" di cui si dirà in seguito (Cap.IV), ili quale permette di dimostrare le proposizioni che nell'atteggiamento classico venivano fondate sulla frase ricordata.

8 - Nella scelta da noi fatta la frase "definizione d'uso" per designare la procedura per la definizione del concetto di probabbilità si accorda anche con la natura della dottrina che intendiamo esporre, e che, come abbiamo detto, intende introdurre il massimo possibile di razionalità nel comportamento economico dei soggetti umani. Pertanto la proposizione che daremo senza dimostrazione nel Cap.IV riguarderà i comportamenti concreti dei soggetti stessi. Nelle esposizioni moderne si suol indicare la trattazione che noi faremo del concetto di probabilità e delle sue applicazioni con la frase "teoria soggettiva della probabilità"; questa frase intenderebbe forse differenziare questo nostro modo di presentare i concetti dal modo classico, che viene invece qualificato come "teoria oggettiva" della probabilità. Ritorneremo in seguito ampiamente su questi argomenti, che riguardano i fondamenti di una certa lettura del mondo con gli strumenti matematici.

1 - Nel linguaggio comune entra spesso il termine "caso"; come abbiamo già rilevato, i termini del linguaggio comune non hanno quasi mai significato costante, ma questo viene precisato dal contesto e dalle abitudini di colui che parla o scrive. Ciò ha forse influenzato l'impiego che si fa di termini come "caso" oppure anche "fato" oppure "destino"; termini che vengono preferibilmente usati per indicare qualche cosa che sfugge ad una nostra completa conoscenza e forse provoca degli fatti che la nostra volontà non riesce a controllare completamente e che quindi noi dobbiamo limitarci ad accettare.

Abbiamo parlato di incertezza, nel capitolo precedente. Nel modo comune di presentare le cose il concetto di incertezza è collegato con il concetto di caso, perché questo viene assunto in qualche modo come la personificazione delle cause della nostra mancata conoscenza completa delle cause dei fenomeni. Non riteniamo necessario approfondire ulteriormente questa analisi, che non appare utile agli sviluppi successivi delle nostre argomentazioni; d'altra parte non intendiamo essere coinvolti in discussioni di carattere filosofico, come quelle che nascerebbero se ci si domandasse se il caso è soltanto un modo per indicare una nostra ignoranza della struttura completa della natura, ignoranza che si può sempre sperare riducibile con il progresso della scienza, oppure se il caso é una componente radicale ed ineliminabile del mondo. La prima opinione è stata adottata da Laplace [PREDETTO; INTR.,2 E CAP. I,7]. Questo matematico afferma infatti che se esistesse una intelligenza capace di conoscere le masse di tutte le molecole, le loro posizioni e le loro velocità in un determinato istante questa stessa intelligenza potrebbe predire tutto l'avvenire dell'Universo in forza delle leggi della Meccanica razionale. Pertanto (concludeva Laplace) il caso viene da noi invocato soltanto in conseguenza della nostra ignoranza e della limitazione della nostra intelligenza: ed il calcolo delle probabilità costituisce un tentativo di colmare le lacune dovute ai nostri limiti.

2 - Quali che siano le ragioni della nostra ignoranza, ci interessa qui rilevare esplicitamente che esistono degli avvenimenti che non possiamo dominare completamente, e sul cui accadere non abbiamo informazioni complete, che ci permettano di accertare completamente fatti, tempi e circostanze. Accettiamo quindi come noto il concetto di evento aleatorio, o casuale. E' noto che il termine "aleatorio" deriva dalla parola latina "alea" che significa "dado"; e possiamo quindi arguire che il risultato del lancio di un dado è stato preso come esempio caratteristico e paradigmatico dell'evento aleatorio; del resto anche nella lingua italiana moderna il termine "alea" ha spesso il significato di "rischio": significato che rientra quindi nell'ambito dell'incertezza.

Nel seguito indicheremo gli eventi aleatori con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come A, B, C,...E, H,....X, Y,.. ecc.

OSSERVAZIONE - Consideriamo un evento aleatorio E, cioè un evento che può accadere oppure no, e sul cui accadere non abbiamo informazioni complete; anche il non accadere di E può legittimamente essere considerato come un evento aleatorio; tale evento verrà chiamato "complementare " di E ed indicato con il simbolo E' (che leggeremo spesso « non E »).

Dato che sia un evento E, la considerazione del suo complementare si può considerare come una operazione logica; operazione che è stata indicata apponendo un apice a destra in alto al simbolo dell'evento; per questa operazione logica vale ovviamente la legge:

(1) $$(E')' = E;$$

che è analoga alla legge detta "doppia negazione" valida in alcune lingue (per esempio nella lingua latina).

3 - Consideriamo due eventi aleatori A e B che chiameremo convenzionalmente eventi "semplici"; converremo di prendere in considerazione anche altri eventi aleatori, che chiameremo , pure convenzionalmente, "composti" dai due; tali eventi sono:

1) L'evento che riterremo verificato quando si verifichi almeno uno dei due eventi A o B. Tale evento composto sarà chiamato "somma logica" dei due eventi A e B ed indicato con il simbolo:

(2) $$A \cup B,$$

che leggeremo "A o B".

2) L'evento che riterremo verificato quando si verificano entrambi gli eventi A e B. Tale evento composto sarà chiamato "prodotto logico" dei due eventi A e , ed indicato con il simbolo:

(3) $$A \cap B$$

che leggeremo "A e B"

4 - Gli eventi composti, che abbiamo presentato nel paragrafo precedente, sono stati costruiti mediante certe operazioni logiche che abbiamo convenzionalmente chiamato "somma" e "prodotto" e per le quali abbiamo introdotto certe notazioni convenzionali. Si può far vedere che, con operazioni del tipo di quelle introdotte, si costruisce una dottrina, che viene comunemente chiamata "Algebra di Boole" [George Boole. 1815-1864], che viene utilizzata in molti capitoli della scienza, per esempio in logica formale, in teoria degli insiemi, in elettrotecnica.

Tali operazioni hanno delle proprietà formali, che ne precisano la sintassi, cioè l'insieme delle regole che debbono essere rispettate se si vuole utilizzare validamente le operazioni stesse.

Diamo qui di seguito le proprietà formali delle operazioni dell'Algebra di Boole, insieme con i loro nomi abituali : il simbolo "=" posto tra due espressioni significa che una di esse può essere sostituita validamente all'altra.

(4) $$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A$$

(proprietà commutativa)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(proprietà associativa)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(proprietà distributiva).

$$A \cup (A \cap B) = A \quad ; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

(legge di assorbimento).

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A.$$

(proprietà di idempotenza).

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

(Leggi di De Morgan)[Augustus De Morgan.1806-1871].

Converremo poi di indicare convenzionalmente con il simbolo "$\emptyset$" un evento giudicato impossibile. Si avranno di conseguenza le formule:

(5) $$A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cup \emptyset = A.$$

OSSERVAZIONI - 1 - Nelle formule precedenti compaiono i simboli di eventi A,B,C. Tuttavia esse debbono essere intese come valide quali che siano gli eventi stessi; perciò esse esprimono delle proprietà non dei singoli eventi A,B,C, ma delle operazioni logiche considerate.

2 - La proprietà associativa permette di indicare la somma od il prodotto logico di tre eventi A,B,C senza utilizzare parentesi, semplicemente con le espressioni:

(6) $$A \cup B \cup C \quad ; \quad A \cap B \cap C \; .$$

In modo analogo saranno da noi indicati la somma oppure il prodotto logico quando si tratta di più di tre eventi.

5 - Diremo che due eventi aleatori sono incompatibili se è certo che l'eventuale verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi dell'altro. Tali sono, per esempio i due eventi E ed E' di cui abbiamo detto sopra (nel paragrafo 2); per indicare che due eventi A e B sono incompatibili scriveremo convenzionalmente:

(7) $$A \cap B = \emptyset.$$

1 - Diremo contratto aleatorio un contratto il cui esito dipende dall'avverarsi di un evento sul quale il contraente non ha informazioni complete. Si tratta quindi di un evento che abbiamo chiamato aleatorio; e la mancanza di informazioni complete suscita nel contraente una condizione psicologica di incertezza. Pertanto un contratto cosiffatto viene spesso descritto come stipulato in condizioni di incertezza; nelle pagine precedenti abbiamo spiegato le ragioni che ci fanno scegliere di parlare di informazioni incompleta piuttosto che di incertezza; e non ripeteremo qui le argomentazioni già svolte.

Si possono prendere in considerazioni due tipi di contratti aleatori: un primo tipo è fornito dai giochi d'azzardo e dalle scommesse, o dalle partecipazioni a lotterie od a concorsi consimili (in questo caso l'acquisto del biglietto di una lotteria è da considerarsi equivalente al versamento della posta di una scommessa). Un secondo tipo è costituito dai contratti di assicurazione.

In ogni caso il contraente paga subito una determinata somma a patto che ne sia versata una maggiore, a lui o a persone da lui designate, se si verifica un determinato evento aleatorio, oggetto del contratto : se esce un ambo su una ruota del Lotto, se un determinato biglietto di una lotteria viene estratto, se si verifica un evento spiacevole che è oggetto del contratto di assicurazione.

Pertanto l'essenza del contratto è la stessa in ognuno dei due casi: la differenza sta soltanto nel fatto che, nel caso del gioco o della scommessa, la somma che si riceve viene considerata come una vincita, nel caso dell'assicurazione la somma ricevuta dal contraente, o da persone da lui designate (nel caso dell'assicurazione sulla vita) viene considerata come un risarcimento. Ciò giustifica l'espressione che capita di leggere o di ascoltare, secondo la quale chi scommette sfida il caso, e chi si assicura si premunisce contro il caso.

Nel caso del gioco o scommessa la somma versata dal contraente viene chiamata "posta" del gioco o della scommessa; nel caso del contratto di assicurazione la somma pagata viene di solito chiamata "premio" di assicurazione.

2 - Accettiamo come evidente la seguente proposizione, che può essere considerata come un
POSTULATO del comportamento economico razionale: Nessuno è disposto a pagare subito una somma di denaro a condizione di averne in cambio una minore o al massimo uguale, se si avvera un certo evento aleatorio sul quale il soggetto non ha informazioni complete.

Pertanto, indicata con S la somma di denaro che sarà eventualmente ricevuta, il contraente di un contratto aleatorio versa subito soltanto una posta o un premio che è frazione di tale somma; tale frazione viene abitualmente indicata con il numero pS, essendo p un numero reale che soddisfa alle relazioni:

(1) $$0 < p < 1.$$

In altre parole il numero p indica il rapporto tra la somma (posta o premio), che il contraente è disposto a pagare subito per stipulare il contratto aleatorio, e quella che sarà ricevuta (da lui o da altre persone) nel caso in cui si avveri l'evento aleatorio oggetto del contratto.

Il numero p così determinato viene chiamato "VALUTAZIONE DELLA PROBABILITA' " che il soggetto dà dell'evento, sul quale egli non ha informazioni complete.

OSSERVAZIONE 1 - La valutazione di probabilità qui definita in forma implicita esprime quindi un giudizio soggettivo, e dipende dalle informazioni che sono possedute dal soggetto che emette il giudizio e lo esprime mediante un numero reale che soddisfa alle limitazioni (1). Pertanto, nell'atteggiamento da noi qui assunto, la probabilità non è una qualità dell'evento aleatorio, ma il contenuto di un giudizio, che è formulato da un soggetto, e che può quindi essere diverso da un soggetto ad un altro, a seconda delle informazioni possedute. Pertanto, qui ed in tutto il seguito, quando parleremo di valutazione di probabilità sottintenderemo sempre che esse sono relative ad un determinato soggetto.

OSSERVAZIONE 2 - Il fatto che la valutazione di probabilità sia strettamente soggettiva non implica che essa possa essere cervellotica oppure incoerente. Anzi si potrebbe dire che il calcolo delle probabilità può essere considerato come la teoria della coerenza delle scelte umane in condizioni di informazione incompleta.

E' noto tuttavia che esistono delle costituzioni psicologiche che favoriscono nei soggetti l'assunzione di rischi sproporzionati alle eventuali vincite; la psicologia descrive talvolta questa particolare "propensione al rischio" con la espressione "sindrome del giocatore". Questi soggetti sono stati descritti da molti artisti e scrittori: per esempio, il grande Dostoevskij [Fedor Michajlovich Dostoevskij. 1821-1882] soffriva di questa sindrome, e la descrive in un romanzo, intitolato appunto "Il giocatore".Analoghe considerazioni si incontrano per esempio in B.Pascal (*).

Uno degli aspetti interessanti di queste sintomatologie è dato dal fatto che il giocatore fa tutto il possibile per pagare i debiti di gioco (che non costituiscono obbligo legale), per timore che l'insolvenza abbia per conseguenza la sua esclusione futura dalla possibilità di giocare; e questa sanzione è per lui molto più grave di qualunque perdita finanziaria.

Il caso più semplice ed elementare di contratto aleatorio potrebe essere schematizzato nel modo seguente: due contraenti, F e G (Fabio e Giorgio) versano rispettivamente le somme di denaro f e g ; poniamo:

$$S = f + g.$$

I patti sono che se l'evento E si verifica, F ritira l'intera somma S, se invece E non si verifica (cioè si verifica E', secondo le convenzioni di linguaggio che abbiamo stabilito), sarà G che ritirerà la somma S.

Diremo quindi che F e G valutano le probabilità di E e di E' rispettivamente con i numeri:

(2) $$p = f/S \quad ; \quad q = g/S$$

Si verifica che si ha:

(3) $$p + q = 1;$$

si osservi inoltre che ognuno dei contraenti, nell'accettare l'ammontare della posta versata dall'altro, accetta e fa propria anche la valutazione che l'altro dà dell'evento a lui favorevole. Così per esempio F, nell'accettare che G versi la somma g come posta, accetta anche la valutazione q che G dà della probabilità dell'evento E'.

OSSERVAZIONE 3 - Il fatto che entrambi i giocatori versino la loro posta in anticipo non è ovviamente essenziale al contratto. Da un certo punto di vista si potrebbe dire che ciò serve soltanto a garantire la solvibilità del contraente nel caso di esito sfavorevole. Nella pratica, se si tratta per esempio di un soggetto che gioca al Lotto, o alla roulette, o si assicura presso un assicuratore noto e solvibile, soltanto uno dei contraenti deve versare la posto (o il premio) per poter stipulare il contratto. Per l'altro la solvibilità è ovviamente presunta, come risulta dagli esempi addotti.

OSSERVAZIONE 4 - L'esempio elementare di contratto aleatorio che abbiamo presentato ci offre il destro per accennare a vari modi per presentare il giudizio di probabilità che un soggetto emette a proposito di un evento che per lui è aleatorio. Così per le valutazioni date dalle (2) si suol presentare le valutazioni p e q rispettivamente dicendo che F e G valutano le probabilità di E e di E' come "f su S" e "g su S". Spesso, se i razionali p e q sono rappresentabili con numeri decimali che non hanno più di due cifre dopo la virgola, i razionali stessi vengono moltiplicati per 100, e quindi le valutazioni di probabilità vengono espresse in "percento"; così per esempio se è p = 0.3 si suole anche dire che p vale "trenta per cento". Infine invece di presentare le valutazioni come numeri razionali, si possono anche presentare i due addendi f e g, i quali, sommati, danno la la vincita di uno dei contraenti. In questi casi si suole anche dire che "F scommette f contro g" sul verificarsi di E. Spesso infine, invece di presentare i numeri f e g si enunciano due interi ad essi proporzionali.

3 - Il postulato enunciato sopra non ha il significato di principio logico, nè di legge morale o positiva: esso riguarda il comportamento economico dei soggetti umani, ma con la sua formulazione non si intende escludere che si possano dare anche altri comportamenti, dettati da criteri e scelte che non sono appartenenti alla pura economia. Inoltre il postulato in parola riguarda il comportamento economico quando esso è (o vuole essere) razionale. E' noto che di fatto i soggetti umani raramente si comportano in modo perfettamente razionale, anche nel campo puramente economico, cioè anche quando cercano soltanto il proprio interesse.

Ripetiamo inoltre che esistono dei soggetti che trovano particolare gratificazione nell'assumere rischi che la maggioranza delle persone ragionevoli stima inutili o irrazionali. Ma la Matematica non ha strumenti per poter correggere le patologie psicologiche; pertanto questi comportamenti esuleranno dalle nostre considerazioni.

Le limitazioni (1) riguardano dunque il comportamento razionale, in condizioni di informazioni incomplete, di un soggetto che intende o deve stringere un contratto aleatorio. Per gli sviluppi che seguono sostituiremo convenzionalmente queste limitazioni con le relazioni seguenti:

(2) $$0 \le p \le 1.$$

OSSERVAZIONE 5 - I valori estremi dell'intervallo (2) non corrispondono ovviamente a casi di effettivi contratti aleatori; essi tuttavia saranno assunti convenzionalmente (come si è detto) per significare situazioni limite: precisamente il valore 0 (zero) per significare che il soggetto giudica l'evento aleatorio impossibile, il valore 1 per indicare che il soggetto giudica certo l'evento. In entrambi questi casi, come si è detto, ovviamente il contratto aleatorio non viene stipulato.

(*) Tel homme passe sa vie sans ennui, en jouant tous les jours peu de chose. Donnez-lui tous les matins l'argent qu'il peut gagner chaque jour, à la charge qu'il ne joue point: vous le rendrez malheureux. On dira peut-être que c'est qu'il recherche l'amusement du jeu, et non pas le gain. Faites-le donc jouer pour rien, il ne s'y échauffera pas et il s'y ennuiera. Ce n'est donc pas l'amusement seul qu'il recherche: un amusement languissant et sans passion l'ennuiera. Il faut qu'il s'y échauffe et qu'il se pipe lui-même, en s'imaginant qu'il serait heureux de gagner ce qu'il ne voudrait pas qu'on lui donnât à condition de ne point jouer, afin qu'il se forme un sujet de passion, et qu'il excite sur cela son désir, sa colère, sa crainte, pour l'objet qu'il s'est formé, comme les enfants qui s'effrayent du visage qu'ils ont barbouillé.[Blaise Pascal - Pensées - Section II. N.139. Ed. Léon Brunschvicg].

IV - IL PRINCIPIO DI COERENZA.

1 - Le valutazioni di probabilità che un soggetto formula in relazione ad uno od a più eventi aleatori non sono delle espressioni arbitrarie o cervellotiche, che il soggetto esterna senza regole ed a capriccio. Anzi esse devono rispecchiare il massimo di razionalità nel comportamento del soggetto in condizioni di informazione incompleta, secondo lo spirito autentico del calcolo delle probabilità. Ciò non significa ovviamente che un soggetto non sia libero di prendere delle decisioni avventate, imprudenti ed irrazionali, ma significa soltanto che egli dovrà poi pagare molto caro questo suo comportamento contrario alla ragione ed all'intelligenza.

Vedremo in seguito come si possano dare delle valutazioni di probabilità che rispettino la prudenza e che tengano conto delle informazioni che il soggetto può acquisire.

2 - In questo ordine di idee, per la descrizione coerente del comportamento razionale del soggetto umano postuliamo che sussista il seguente

PRINCIPIO DI COERENZA. La valutazione di probabilità di un determinato evento aleatorio E sarà detta coerente (e coerente sarà detto il soggetto che la formula) se, quale che sia il sistema di contratti riguardanti l'evento E che il soggetto stipula, egli non sarà mai certo di vincere o di perdere.

In altra forma si potrebbe dire che un evento aleatorio deve rimanere tale, quale che sia la combinazione di contratti che lo riguardano; e nessuno deve poter costruire delle combinazioni di contratti, riguardanti l'evento E, in modo tale da poter essere sicuro di vincere (o di perdere) in ogni caso possibile.

OSSERVAZIONE - Abbiamo presentato il principio di coerenza come un postulato della descrizione del comportamento razionale dell'uomo di fronte a decisioni da prendersi in condizioni di informazione incompleta (o, come suol dirsi, di incertezza). Ciò significa che, nella trattazione che stiamo costruendo, rinunciamo a dimostrare la proposizione. Su di essa saranno fondate le dimostrazioni dei teoremi che incontreremo in seguito.

Questo nostro atteggiamento è analogo a quello che si adotta anche in altre branche della matematica, quando si dà una definizione implicita (o definizione d'uso, o definizione per postulati) dei concetti che si trattano. In questo caso si tratta del concetto di probabilità, come intendiamo qui precisarlo ai fini della trattazione matematica. Ovviamente questo nostro atteggiamento è il risultato di una scelta; pertanto non si esclude che si possano dare delle altre trattazioni, diversamente strutturate, nelle quali la proposizione qui data come postulato, e quindi senza dimostrazione, possa essere dimostrata (e quindi diventi un teorema), sulla base di altri postulati opportuni.

3 - Abbiamo detto che, sulla base del postulato enunciato si possono dimostrare le proposizioni matematiche che abitualmente vengono considerate appartenenti al calcolo delle probabilità. Prima di ciò vorremmo tuttavia soffermarci a commentare ulteriormente il significato della proposizione che abbiamo enunciato senza dimostrazione. Essa infatti non contiene un assioma della logica, nè una legge fisica, nè una legge morale, nè infine una legge civile positiva. Si potrebbe addirittura osservare che, nella maggioranza dei casi pratici, i soggetti si comportano proprio in modo da eludere il principio di coerenza, e di stringere dei sistemi di contratti in modo tale che una delle parti contraenti sia certa di guadagnare, comunque vadano le cose. Si può tuttavia osservare che ciò non avverrebbe (o avverrebbe più raramente) se tutti i soggetti che debbono prendere delle decisioni in condizioni di informazione incompleta fossero adeguatamente informati in modo completo, e se sapessero trarre rigorosamente le conseguenze dalle informazioni che posseggono. In altre parole, il principio di coerenza descrive la situazione che si avrebbe se vi fosse una diffusione generale di informazione completa ed una completa e coerente razionalità di comportamento economico.

In forma spicciola, il principio di coerenza potrebbe essere considerato come una ammonizione, secondo la quale nessuno può considerarsi sempre più informato o più intelligente o più furbo di tutti gli altri.

L'osservazione della realtà concreta quotidiana parrebbe dimostrare che queste condizioni non sono mai state realizzate. Ciò tuttavia non svuota di significato il principio di coerenza: si può osservare infatti che si verifica in questo caso una situazione analoga a quella che si ha nella termodinamica: è noto infatti che non esiste alcuna macchina termica reale che funzioni secondo il ciclo ideale di Carnot [Sadi-Nicolas Carnot. 1796-1832]; ma ciò non svuota di significato le trattazioni di termodinamica teorica, le quali anzi stabiliscono i criteri con i quali le macchine reali debbono essere costruite per ottenere i massimi rendimenti possibili. Quindi i principi della termodinamica permettono la conoscenza teorica di certi fenomeni fisici, e guidano il tecnico anche nei comportamenti pratici presentando certe situazioni ideali alle quali noi cerchiamo di avvicinarci il più possibile.

V - LEMMA E TEOREMA FONDAMENTALE.

1 - Indichiamo con n un numero naturale maggiore di 1. Siano dati n numeri reali positivi:

(1) $$p(i) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,n)$$

tali che valga la condizione:

(2) $$\Sigma\ p(i) = 1.$$

Consideriamo poi altri n numeri reali positivi:

(3) $$S(i) > 0 \qquad (i=1,\ 2,\ldots\ldots,n).$$

Indichiamo rispettivamente con S' ed S" il minimo ed il massimo dei numeri (3); poniamo cioè:

(4) $$S' = \min[S(i)] \quad , \quad S'' = \max[S(i)].$$

LEMMA - Sussistono le relazioni:

(5) $$S' \leq \Sigma\ p(i)\cdot S(i) \leq S''.$$

Dim. In forza delle ipotesi (2) e (4) si ha ovviamente:

(6) $$S' = S'\cdot\{\Sigma\ p(i)\} \leq \Sigma\ p(i)\cdot S(i) \leq S''\cdot\{\Sigma\ p(i)\} = S''.$$

2 - Consideriamo ora certi n eventi aleatori:

(7) $$E(i) \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

e suppponiamo che siano valide le due seguenti

IPOTESI. 1) Gli eventi siano due a due incompatibili. In formule, adottando la simbologia presentata sopra si abbia, per ogni coppia di indici i e k diversi tra loro:

(8) $$E(i) \cap E(k) = \emptyset.$$

2) Gli eventi formino nel loro complesso un sistema exaustivo; ciò significa, secondo la terminologia adottata, che almeno uno tra essi deve verificarsi.

TEOREMA FONDAMENTALE . - Nelle ipotesi enunciate, la condizione necessaria e sufficiente perché il principio di coerenza sia soddisfatto è che, indicata con p(i) la valutazione di probabilità dell'evento E(i), si abbia:

(9) $$\Sigma\ p(i) = 1.$$

Dim. Dimostriamo che la condizione (9) è sufficiente: supponiamo quindi che la (9) sia soddisfatta e dimostriamo che in qualunque sistema di contratti relativi agli eventi (7) uno scommettitore *non* è mai certo di vincere o di perdere.

Infatti, indicando con $S(i)$ la vincita eventuale se si verifica l'evento $E(i)$, la posta che egli versa è $p(i)\cdot S(i)$; in base al Lemma dimostrato, per la (5) la somma delle poste versate non è inferiore alla minima vincita possibile, e non è superiore alla massima di quelle vincite.

Dimostriamo che la condizione è necessaria; a tal fine dimostriamo che, se la condizione (9) non è soddisfatta, esiste un sistema di contratti aleatori (scommesse) mediante il quale il soggetto è certo di vincere.

Supponiamo che la vincita sia S, uguale per ogni contratto, e supponiamo che le valutazioni di probabilità siano tali che si abbia:

(10) $\Sigma\, p(i) < 1.$

Allora la somma delle poste versate vale:

(11) $\Sigma\, [p(i)\cdot S] = S\cdot[\Sigma p(i)]$

ed il secondo membro di questa eguaglianza è minore di S per l'ipotesi (10) ammessa; quindi in questo caso il soggetto è certo di guadagnare nel sistema di contratti che egli stipula.

3 - OSSERVAZIONE. Lo schema logico della dimostrazione del teorema potrebbe essere presentato astrattamente nel modo seguente:
Sia P la frase « E' valida la relazione (2) del paragrafo precedente» e sia Q(x) la frase «il soggetto è certo di guadagnare nel sistema di contratti x».

Allora la formula:

(12) $(x)\{-Q(x)\}$

traduce la frase: « per ogni sistema di scommesse il soggetto non è certo di vincere ».

La formula:

(13) $P \dashrightarrow (x)\{-Q(x)\}$

esprime che P è condizione sufficiente per la (12). Per dimostrare che la condizione è necessaria occorrerebbe dimostrare che vale la :

(14) $(x)\{-Q(x)\} \dashrightarrow P,$

ma invece di questa si può dimostrare la proposizione contronominale, che è equivalente, cioè la proposizione:

(15) $-P \dashrightarrow -[(x)\{-Q(x)\}].$

Ma la $-[(x)\{-Q(x)\}]$ è equivalente alla:

(16) $Ex\{Q(x)\},$

che traduce appunto la seconda parte della nostra dimostrazione.

NOTA - Indicata con $Q(x)$ una proposizione aperta (predicato), abbiamo indicato con i simboli:

$$(x) \qquad e \qquad Ex$$

rispettivamente i quantificatori universale ed esistenziale. Pertanto la (12) può essere letta: « Per ogni sistema di contratti il soggetto non è certo di vincere », e la (16) può essere letta :« Esiste un sistema di contratti nel quale il soggetto è certo di vincere ».

VI - PRIME CONSEGUENZE DEL TEOREMA FONDAMENTALE.

1 - Consideriamo un evento aleatorio E, ed indichiamo, con E' il suo complementare; in altre parole, indichiamo con E' l'evento aleatorio che riteniamo verificato se E non si verifica.

Indichiamo rispettivamente con le notazioni tradizionali p e q le valutazioni di probabilità di E e di E'; poniamo cioè:

(1) $p = p(E) \quad ; \quad q = p(E')$.

PROPOSIZIONE 1 - Si ha:

(2) $p + q = 1$.

Dim. La dimostrazione consegue immediatamente dal teorema fondamentale del paragrafo precedente: è chiaro infatti che i due eventi E ed E' costituiscono un sistema esaustivo di eventi.

OSSERVAZIONE - L'argomentazione precedente si fonda sul principio logico che viene detto "del terzo escluso" e che viene anche presentato con la espressione latina "tertium non datur". Secondo questo principio intuitivo, non si danno casi intermedi tra il verificarsi ed il non verificarsi di un dato evento E: necessariamente esso si verifica, oppure non si verifica (ed allora si verifica l'evento E').

2 - Consideriamo due eventi aleatori A e B, e supponiamo che essi siano incompatibili; si abbia cioè:

(3) $A \cap B = \emptyset$.

Indichiamo rispettivamente con a e b le valutazioni di probabilità di A e di B ; poniamo cioè:

(4) $a = p(A) \quad ; \quad b = p(B)$.

Indichiamo infine con C l'evento somma logica di A e di B ; poniamo cioè:

(5) $C = A \cup B$,

ed indichiamo con c la valutazione di probabilità di C, ponendo cioè:

(6) $c = p(C)$.

Nelle ipotesi poste vale la

PROPOSIZIONE 2 - Fra le tre valutazioni di probabilità a, b, c sussite la relazione:

(7) $a + b = c$.

Dim. I due eventi:

(8) $A \cup B$ ed $(A \cup B)' = A' \cap B'$

costituiscono un insieme exaustivo. Indichiamo qui provvisoriamente con x la valutazione della probabilità dell'evento $(A \cup B)'$; poniamo cioè:

(9) $x = p(A' \cap B')$.

In forza della proposizione 1 si ha quindi:

(10) $$c + x = 1 .$$

Ma dalla ipotesi (3) consegue immediatamente che anche i tre eventi :A, B, $(A \cup B)'$ costituiscono un insieme exaustivo; si ha quindi, sempre in forza della proposizione 1,

(11) $$a + b + x = 1 .$$

Dal confronto tra la (10) e la (11) segue la (7).

OSSERVAZIONE - La proposizione ora dimostrata viene chiamata, nella trattatistica abituale, "Teorema delle probabilità totali (per eventi incompatibili)"; essa viene anche espressa con la formula:

(12) $$p(A \cup B) = p(A) + p(B),$$

beninteso nel caso in cui sia valida l'ipotesi (3).

3 - Supponiamo ora che l'ipotesi (3) non sia valida, cioè che i due eventi aleatori A e B non siano incompatibili. In questo caso si può osservare che i quattro eventi:

(13) $$(A \cap B) \ , \ (A \cap B'), \ (A' \cap B) \ , \ (A' \cap B')$$

costituiscono un insieme exaustivo. Conveniamo di indicare, per brevità, con i seguenti simboli le valutazioni di probabilità;

(14) $$x = p(A \cap B'); \quad y = p(A' \cap B); \ z = p(A \cap B); \ w = p(A' \cap B').$$

In base all'osservazione ora fatta ed in forza del teorema fondamentale si può dunque scrivere:

(15) $$x + y + z + w = 1.$$

D'altra parte anche i due eventi $A \cup B$ ed $(A \cup B)' = A' \cap B'$ costituiscono un insieme exaustivo; quindi, indicando con t la valutazione di probabilità dell'evento $A \cup B$, cioè ponendo:

(16) $$t = p(A \cup B),$$

si avrà:

(17) $$w + t = 1$$

Osserviamo infine che l'evento A può essere considerato come la somma logica di $(A \cap B)$ e di $(A \cap B')$; si ha cioè:

(18) $$A = (A \cap B) \cup (A \cap B').$$

Questi due ultimi eventi sono incompatibili tra loro; esprimeremo questo fatto, insieme con quello espresso dalla (18), dicendo che i due eventi forniscono una partizione exaustiva dell'evento A.

Indicando con a e b le valutazioni di probabilità degli eventi A e B rispettivamente, cioè ponendo:

(19) $$a = p(A) \quad , \quad b = p(B),$$

dall'osservazione ora fatta a proposito della (18) si trae, per la proposizione 2:

$$a = x + z. \tag{20}$$

In modo analogo si dimostra che si ha:

$$b = y + z. \tag{21}$$

Confrontando la (15) e la (17) si ottiene:

$$t = x + y + z; \tag{22}$$

e da questa, e dalle (20) e (21) si ottiene:

$$t = a + b - z. \tag{23}$$

Questa formula viene di solito scritta nel modo seguente:

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B). \tag{24}$$

Essa fornisce un legame tra le valutazioni di probabilità di due eventi A e B e della loro somma logica e del loro prodotto logico, legame che è la ovvia generalizzazione di quello espresso dalla (12).

VII VALUTAZIONE SUBORDINATA DI PROBABILITA'.

1 - Abbiamo ripetutamente osservato che la valutazione di probabilità che un soggetto formula a proposito di un evento che per lui sia aleatorio dipende essenzialmente dalle informazioni che il soggetto stesso possiede, a proposito dell'evento; abbiamo anche ricordato che, di conseguenza, il giudizio di probabilità può variare, dipendentemente dalle informazioni che il soggetto può ricevere. Partiremo da queste osservazioni per introdurre il concetto di valutazione subordinata di probabilità di un evento.

2 - Consideriamo due eventi aleatori A e B *non incompatibili*. Indichiamo con a e b rispettivamente le loro valutazioni di probabilità, ponendo quindi:

(1) $a = p(A) \quad ; \quad b = p(B).$

Adotteremo inoltre in questo paragrafo le notazioni già adottate nel paragrafo 3 del cap. VI; porremo quindi, anche qui:

(2) $x = p(A \cap B') \quad ; \quad y = p(A' \cap B) \quad ; \quad z = p(A \cap B) \quad ; \quad w = p(A' \cap B');$
$t = p(A \cup B);$

e ricordiamo le relazioni che sussistono tra queste valutazioni, relazioni che sono state dimostrate nel citato paragrafo del cap. VI:

(3) $x + y + z + w = 1$
(4) $t + w = 1$
(5) $x + z = a$
(6) $y + z = b$
(7) $x + y + z = t$

Indichiamo ora con il simbolo;

(8) $p(B|A)$

la valutazione della probabilità dell'evento B che un soggetto formula quando è in possesso dell'informazione che l'evento A si è verificato; tale valutazione viene spesso indicata dicendo che si tratta della valutazione della probabilità di B "subordinata" o anche "condizionata" dall'evento A.

OSSERVAZIONE - Il fatto che la valutazione della probabilità di un evento B sia condizionata dall'informazione del fatto che l'evento A si sia verificato non significa che uno dei due eventi sia giudicato causa, oppure effetto dell'altro; e neppure che il verificarsi di uno di essi sia condizione necessaria oppure sufficiente per il verificarsi dell'altro.

Ciò non esclude tuttavia che i concetti ora presentati, e le loro conseguenze e gli sviluppi collegati, possano essere utilizzati per descrivere delle situazioni reali, nelle quali sussitano dei rapporti di causa ad effetto.

Poniamo ora:

(9) $\alpha = x/a \quad ; \quad \pi = z/a;$

in conseguenza della (5) si ha:

(10) $\alpha + \pi = 1$.

Il significato della (9) potrebbe essere interpretato nel modo seguente: i due eventi:

(11) $A \cap B'$, $A \cap B$

forniscono una partizione exaustiva dell'evento A; pertanto, una volta che si sappia che A si è avverato, i due numeri α e π rappresentano le valutazioni delle probabilità degli eventi (11). In particolare poi il numero π può essere interpretato come la valutazione della probabilità dell'avverarsi anche di B, una volta che A si sia avverato. Ora dalla seconda delle (10) si trae:

(12) $z = a \cdot \pi$,

relazione che, con i simboli introdotti sopra, può essere scritta nella forma:

(13) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$.

In modo analogo si può ragionare, ponendo:

(14) $\beta = y/b$; $\sigma = z/b$.

Si ha, anche in questo caso:

(15) $\beta + \sigma = 1$,

e il numero σ può essere interpretato come la valutazione della probabilità dell'avverarsi anche di A, una volta che si sappia che B si è avverato. Pertanto si può scrivere:

(16) $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B)$.

Dal confronto delle (13) e (16) si trae poi la :

(17) $p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B)$.

La (17) costituisce un importante punto di partenza per ulteriori successivi sviluppi, particolarmente interessanti per le applicazioni del calcolo delle probabilità alla scienza ed alla tecnica. Qui ci limitiamo ad osservare che la (17) stessa traduce in forma precisa un modo molto comune di argomentare nella pratica: per esempio la valutazione della probabilità del verificarsi di un naufragio in una certa zona dell'oceano può ovviamente essere influenzata dalla informazione che in quella zona è in corso una tempesta particolarmente violenta; ma viceversa, la notizia che in quella zona sia avvenuto un naufragio può influenzare la valutazione della probabilità che ivi sia in corso una violenta tempesta.

3 - La (17) viene applicata in certi casi particolari notevoli, conducendo, come si è detto, ad applicazioni importanti per la scienza e la tecnica.

Indicato con n un numero naturale maggiore di 1, si considerino certi n eventi aleatori:

$$(18) \qquad C(i) \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

si suppponga che gli eventi (18) siano due a due incompatibili: si abbbia cioè, per ogni coppia di indici i e k tra loro diversi:

$$(19) \qquad C(i) \cap C(k) = \emptyset.$$

Indichiamo con C l'evento che è somma logica degli eventi (18), ponendo quindi:

$$(20) \qquad C = C(1) \cup C(2) \cup \ldots\ldots \cup C(n);$$

consideriamo ora un certo evento E, e supponiamo di conoscere le n valutazioni condizionate di probabilità:

$$(21) \qquad p[E|C(i)] \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

supponiamo infine di conoscere le n valutazioni di probabilità:

$$(22) \qquad p[C(i)]. \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Supponiamo di aver l'informazione che l'evento E si è verificato; si pone il problema di dare le valutazioni condizionate di probabilità:

$$(23) \qquad p[C(i)|E] \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Il problema ora formulato viene spesso indicato come "problema della probabilità delle cause", perché esso venne presentato in un caso particolare dal Bayes [Thomas Bayes. 1702-1761] nella forma seguente;

" Si sa che un certo evento E può essere effetto di varie cause:

$C(1), C(2), \ldots\ldots, C(n)$,

che sono mutuamente incompatibili, cioè si escludono a vicenda; si sa che l'evento E è accaduto; valutare la probabilità che esso sia stato provocato da una determinata causa C(i) tra tutte quelle possibili."

4 - La soluzione al problema presentato sopra si può conseguire applicando a questo caso la formula (17). Si ottiene così:

$$(24) \qquad p(E)\cdot p[C(i)|E] = p[C(i)]\cdot p[E|C(i)]$$

Supponendo che sia valida la relazione:

$$(25) \qquad \Sigma\, p[C(i)|E] = 1$$

dalle (24), sommando membro a membro, si trae:

$$(26) \qquad p(E) = \Sigma\, p[C(i)]\cdot p[E|C(i)];$$

quindi il problema è risolto dalla formula (detta formula di Bayes):

$$(27) \qquad p[C(i)|E] = \{p[C(i)]\cdot p[E|C(i)]\}/p(E),$$

quando si tenga conto della (26).

OSSERVAZIONE - Nella formulazione originale di Bayes, e nelle applicazioni di questa procedura che si fanno nella pratica, la relazione (25) si presume ovviamente soddisfatta: si accetta infatti tacitamente che l'evento E possa essere provocato soltanto da una delle cause C(i), e quindi si accetta che il verificarsi dell'evento E implichi che almeno una (ed una sola, per ipotesi) tra le cause si sia verificata; in queste ipotesi, la (25) esprime che , avuta l'informazione che l'evento E si è verificato, gli eventi C(i) formano una partizione exaustiva dell'evento C, espresso dalla (20). Quindi la (25) segue dal teorema fondamentale del Cap.V.

5 - La procedura che abbiamo esposto, e la formula di Bayes che ne consegue, possono essere utilizzate per risolvere un problema al quale abbiamo già accennato varie volte: si tratta del problema di utilizzare nel modo più razionale possibile le informazioni che si possono via via ottenere durante una serie di prove, o manipolazioni di sistemi fisici o altre operazioni su oggetti materiali.

Esporremo qui di seguito un esempio molto semplice, che tuttavia può servire come illustrazione delle idee che stiamo esponendo.

Siano dati due sacchetti, indichiamoli con P ed S (primo e secondo); in ognuno di essi sono stati introdotti due gettoni, indistinguibili tra loro al tatto. Si sa che in uno dei due sacchetti i gettoni sono entrambi bianchi e nell'altro uno è bianco e l'altro è nero.

Si prende il sacchetto P e si estrae un gettone, che risulta essere bianco; si tratta di valutare la probabilità che il sacchetto P abbia la composizione BB (bianco, bianco), oppure BN (bianco, nero).

E' chiaro che se il gettone estratto è nero non vi possono essere dubbi: la composizione del sacchetto è del tipo BN; ma se il gettone estratto è bianco non è possibile trarre alcuna conclusione certa. Supponiamo che si sia avverato questo secondo caso, e supponiamo di reintrodurre nel sacchetto il gettone bianco estratto, di agitare il sacchetto e di estrarre ancora un gettone da questo. Anche in questo caso, se il gettone estratto è nero l'esperimento finisce; ma se il gettone estratto è bianco, anche questa volta non si può trarre alcuna conclusione certa; tuttavia, utilizzando la formula di Bayes, è possibile modificare la valutazione di probabilità concernente la composizione del sacchetto, tenendo conto della informazione ottenuta con la prima estrazione; ovviamente la procedura si può ripetere, reintroducendo il gettone estratto e ripetendo l'estrazione.

Supponiamo che si eseguano n estrazioni, e che sempre il gettone estratto risulti essere bianco; il senso comune conduce ad accettare che ogni esperimento di questo tipo rafforza la convinzione che la composizione del sacchetto in questione è BB. Non si raggiunge mai la certezza, ma è possibile modificare ad ogni esperimento la valutazione della probabilità in modo da tener conto, nel miglior modo possibile, delle informazioni che si sono avute dagli esperimenti precedenti.

I calcoli relativi si possono disporre nel modo seguente; indichhiamo con C(1) e C(2) rispettivamente i due eventi: il sacchetto P ha la composizione BB; il sacchetto P ha la composizione BN. Indichiamo con E l'evento: estrazione di un gettone bianco dal sacchetto. Si ha ovviamente:

(28) $$p[E|C(1)] = 1 \quad ; \quad p[E|C(2)] = \tfrac{1}{2}.$$

In mancanza di ogni informazione, prima di iniziare ogni esperimento, riteniamo ragionevole attribuire uguali valutazioni di probabilità ai due eventi C(1) e C(2), e porre pertanto:

(29) $$p[C(1)] = p[C(2)] = \tfrac{1}{2}.$$

La formula (27) fornisce, in corrispondenza a questi valori le seguenti valutazioni di probabilità:

(30) $$p[C(1)] = 2/3 \quad ; \quad p[C(2)] = 1/3.$$

Supponiamo ora di reintrodurre nel sacchetto il gettone bianco estratto , di rifare l'estrazione e di estrarre una secondo volta un gettone bianco. Possiamo applicare ancora volta la formula (27), ma questa volta dobbbiamo tener conto delle informazioni già ottenute con la prima estrazione, e quindi utilizzare i valori (30) invece dei valori (29). Eseguendo il calcolo si ottiene, dopo la seconda estrazione:

(31) $$p[C(1)] = 4/5 \quad ; \quad p[(C2)] = 1/5.$$

Ripetendo n volte la procedura, con la utilizzazione delle informazioni ottenute, e supponendo di estrarre ogni volta un gettone bianco si otterrebbe:

(32) $$p[C(1)] = 2^n/(1+2^n) \quad ; \quad p[C(2)] = 1/(1+2^n).$$

Per esempio, se è $n= 10$, essendo:

(33) $$2\hat{\ }10 = 1024,$$

il valore di p[C(2)] è di poco superiore a 0.000975. Appare quindi ragionevole scommettere una lira contro un milione sul fatto che il sacchetto P abbia la composizione BB.

5 - Supponiamo ora che la informazione che l'evento A sia avvenuto non abbia alcune influenza sul giudizio di probabilità dell'avverarsi dell'evento B. Si avrà quindi, con i simboli adottati:

(34) $$p(B|A) = p(B);$$

formula la quale esprime appunto che l'informazione del fatto che l'evento A si è avverato non ha alcuna influenza sulla valutazione di probabilità di B. Diremo convenzionalmente che i due eventi sono giudicati come indipendenti.

In questo caso la (13) assume la forma particolare:

(35) $$p(A)\cdot p(B) = p(A\cap B).$$

IL significato di questa formula viene abitualmente richiamato con la espressione "Teorema delle probabilità composte (per eventi indipendenti)".

OSSERVAZIONE - Osserviamo esplicitamente che il fatto che valga la (34), e quindi anche la (35), esprime un giudizio che il soggetto formula in base alle sue convinzioni ed alle sue informazioni. Quindi non si può escludere che due eventi, che sono giudicati indipendenti da un soggetto, non lo siano da un altro. Ripetiamo che dalle considerazioni qui svolte esula qualunque giudizio sul rapporto eventuale di causa e di effetto tra i due eventi considerati.

VIII - LA VALUTAZIONE A PRIORI. I CASI CLASSICI.

1 - Abbiamo postulato che la valutazione della probabilità di un evento aleatorio debba ubbidire al principio di coerenza; ciò lascia aperto il problema di indagare su quali fondamenti e con quali procedure si possa giungere a dare una valutazione ragionevole e prudente della probabilità di un dato evento aleatorio. A questo proposito pare chiaro che la diversità e la numerosità dei casi che si possono presentare, e che inducono un soggetto ad emettere un giudizio di probabilità, rendono poco attendibile la pretesa di enunciare dei principi assolutamente generali. Esistono tuttavia dei casi di eventi aleatori nei quali la valutazione della probabilità può essere data in modo prudente e ragionevole in base a procedimenti che si presentano come abbastanza naturali.

Tali casi sono abbastanza schematici, come si vedrà, e si riferiscono per lo più ad eventi aleatori che vengono presi in considerazione in occasione di giochi, o scommesse. Occorre tuttavia osservare che proprio la considerazione di questi eventi aleatori ha stimolato le prime riflessioni dei matematici sul calcolo delle probabilità. Questi casi sono in numero relativamente molto ristretto, rispetto alla grandissima varietà delle situazioni nelle quali occorre emettere un giudizio di probabilità. Tuttavia pare ragionevole pensare che proprio sulla considerazione di questi casi si siano fondate le riflessioni che hanno condotto in passato a proporre una definizione del concetto di probabilità viene abitualmente chiamata "oggettiva".

Ritorneremo in seguito su questo argomento; qui ci limitiamo ad osservare che la valutazione della probabilità degli eventi aleatori considerati in epoca classica appare del tutto ragionevole, come si è detto; ma che la estensione della validità di questa procedura ai casi più generali di eventi aleatori appare come il risultato di una assimilazione che molto spesso può legittimamente essere giudicata come arbitraria, e che comunque non sempre appare adeguatamente giustificata.

2 - Le valutazioni di probabilità alle quali abbiamo accennato nel precedente paragrafo vengono emesse quando un evento aleatorio di cui si tratta sia il risultato di una operazione concreta o della manipolazione eseguita su un sistema fisico ben determinato e conosciuto. Per esempio il sistema fisico sia una moneta regolare, la manipolazione sia il lancio della stessa e l'evento sia la comparsa di una delle due facce; oppure il sistema fisico sia un dado perfettamente cubico e simmetrico rispetto al baricentro, la manipolazione sia il lancio del dado e l'evento aleatorio sia la comparsa di una determinata faccia, sulla quale di solito è scritto un numero, dall'uno al sei. Oppure il sistema fisico sia un'urna, nella quale sono inserite delle palline, indistinguibili al tatto, di diversi colori, in numeri noti; e l'evento aleatorio sia l'estrazione dall'urna di una pallina di un determinato colore; oppure il sistema fisico sia un mazzo di carte da gioco, e l'evento sia l'estrazione di una carta determinata, o di più carte determinate, dal mazzo stesso, ben rimescolato ecc.

I sistemi fisici che abbiamo ricordato sono soltanto alcuni esemplari della casistica numerosissima che si potrebbe escogitare, e che costituisce il soggetto di molti libri e manuali, nei quali si direbbe che il calcolo delle probabilità viene ridotto alla analisi ed alla discussione delle possibili manipolazioni su sistemi fisici, od all'enumerazione di varie combinazioni che si possono presentare in situazioni analoghe.

In questi, e negli altri casi che si possono escogitare, come si diceva, la valutazione della probabilità dell'evento aleatorio preso in considerazione viene fatta valutando anzitutto il numero dei risultati possibili delle manipolazioni che si eseguono, valutando il numero dei risultati che possono dar luogo all'evento in questione, e assumendo come valutazione della probabilità di questo il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.

Così per esempio, nel caso in cui si tratti del lancio di una moneta, e l'evento sia la comparsa di una determinata tra le due facce, i casi possibili sono ovviamente 2, esiste un unico caso favorevole, e quindi il numero razionale 1/2 viene assunto come valutazione della probabilità dell'evento che consiste nella comparsa di una determinata faccia dopo il lancio.

La scelta di questa procedura per la valutazione della probabilità di un determinato evento aleatorio del tipo di quelli descritti poco fa è difficilmente giustificabile in modo rigoroso: abitualmente vien fatto di leggere qualche argomentazione che fa appello a considerazioni di simmetria, o anche invoca il principio di ragion sufficiente, o si appoggia su altre considerazioni generiche. Tuttavia questa scelta appare giustificata dalle conseguenze, rilevate empiricamente, come si vedrà nel seguito. Osserviamo inoltre che questa procedura per la valutazione della probabilità in casi particolari permette spesso di far appello all'immaginazione per illustrare il significato di certe valutazioni di probabilità. Queste illustrazioni si basano sul presupposto di poter assimilare certe valutazioni di probabilità a quelle che vengono date in questi casi particolari: per esempio capita spesso di leggere che, se la probabilità di un determinato evento aleatorio è stata valutata col numero 0.01, il realizzarsi dell'evento è assimilato all'estrazione di una pallina bianca da un'urna che ne contiene altre 99 nere. Ripetiamo che queste considerazioni (ed altre analoghe che si possono leggere di frequente) possono servire a fissare le idee ed a fornire delle immagini spesso suggestive delle situazioni. Ma sarebbe forse imprudente fondare su di esse le deduzioni ed i calcoli, senza valutare esplicitamente i fondamenti di certe assimilazioni di certi eventi a certi altri.

In altri termini, il sistema fisico noto, per il quale la valutazione è data con la procedura descritta, viene assunto come un modello della situazione reale, nel quale occorre formulare una valutazione di probabilità. Ora è noto che la costruzione (anche con la sola immaginazione) di modelli di un determinato sistema reale è una procedura molto frequente nella scienza; ma occorre ricordare che l'operazione di assimilazione del sistema reale al modello è quasi sempre il frutto di una intuizione, ed opera dell'immaginazione; per cui il ricercatore deve essere sempre disposto ad analizzare e riconoscere i limiti ed i difetti del modello costruito, e soprattutto deve essere disposto ad abbandonarlo, per ricercarne uno più adeguato.

3 - La procedura ora descritta per la valutazione della probabilità di un evento aleatorio, che sia della classe molto ristretta di cui abbiamo detto, si presenta come molto chiara e semplice; ma occorre osservare esplicitamente che la sua validità è sottoposta ad una condizione perentoria fondamentale. Tale condizione viene abitualmente ricordata dicendo che i casi possibili debbono essere tutti "ugualmente possibili".

A conforto dell'importanza di questa clausola viene citato spesso il caso della scommessa sul lancio contemporaneo di due monete uguali: i casi possibili sono tre : due teste, due croci, una testa ed una croce. Ma essi non sono tutti ugualmente possibili, perché, mentre i primi due possono verificasi in un solo modo, il terzo può verificarsi in due modi. E' facile convincersi di questo se per esempio di immaginasse di contrassegnare le due monete con colori diversi. Questo esempio viene qui citato anche perché diede luogo ad una celebre discussione in cui fu coinvolto il grande matematico francese D'Alembert [Jean-Baptiste le Rond D'Alembert -1717-1783], discussione che avvenne in un periodo storico in cui si stava precisando il concetto matematico di probabilità.

Ora occorre osservare che l'espressione che traduce la clausola di "uguale possibilità", benché appaia a prima vista molto chiara, non dà luogo ad interpretazioni uniformi, e soprattutto non è interpretabile in generale con procedure determinate. Per esempio, nel caso del dado cubico, essa importerebbe la necessità di verificare che il centro di simmetria della figura geometrica coincida con il baricentro meccanico dell'oggetto materiale, e che questo sia costruito con materiale perfettamente omogeneo. Nel caso della estrazione di una o più palline da un'urna, occorrerebbe verificare la assoluta indistinguibilità al tatto di ogni pallina da un'altra, e così via.

Infine ribadiamo qui che i casi nei quali la valutazione di probabilità può essere eseguita con la procedura descritta sono una infima minoranza, rispetto a tutti i casi in cui è necessario esprimere una valutazione in relazione ad un evento aleatorio che non possa essere ricondotto a quelli artificiali e schematici di cui abbiamo detto. L'assimilazione di un evento aleatorio qualunque ad uno di quelli che possono essere escogitati artificialmente è pertanto una operazione che, per quanto intuitiva, non ha, a nostra parere, una giustificazione generale; e che comunque dovrebbe ogni volta essere esplicitamente e coscientemente enunciata. Altrimenti la sua validità potrebbe suscitare qualche ragionevole dubbio.

Aggiungiamo che, quando sia possibile accertare fisicamente e obiettivamente che si verificano delle circostanze per le quali può aver senso parlare di "casi ugualmente possibili", si suol anche dire che ci si trova in una situazione "di simmetria"; l'espressione fa riferimento alle verifiche e misure di cui abbiamo detto, riguardanti il caso del lancio di un dado di forma cubica, e ne costituisce una generalizzazione, ovvia per quanto non rigorosamente giustificata.

4 -. Una valutazione di probabilità che venga formulata in base alle considerazioni svolte poco fa su certi eventi provocati da manipolazioni su sistemi fisici ben determinati viene spesso chiamata "valutazione teorica (di probabilità)", o anche "valutazione a priori". Il significato di questa ultima espressione potrà apparire più chiaro nel seguito, quando avremo parlato del legame tra valutazione di probabilità ed esperienza, trattando della legge cosiddetta "dei grandi numeri". Qui ricordiamo che le argomentazioni presentate costituiscono il fondamento sul quale viene presentata abitualmente la cosiddetta "definizione oggettiva" della probabilità di un determinato evento aleatorio E. Tale definizione è stata formulata per esempio dal grande matematico francese Laplace [Pierre-Simon (marquis de) Laplace.1759-1827] nel suo celebre saggio intitolato: "Essai philosophique sur les probabilités" , pubblicata nel 1819.

Tale definizione viene data abitualmente con una frase del tipo:

"Si chiama probabilità di un determinato evento aleatorio E il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'avverarsi di E e quello dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili".

Nel capitolo I abbiamo precisato le ragioni in base alle quali non ci pare di poter considerare questa frase come una definizione accettabile del concetto di probabilità, ragioni che sono state qui ribadite con le argomentazioni espresse poco sopra.

IX - LO SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE E LA LEGGE EMPIRICA DEI GRANDI NUMERI.

1 - La considerazioni svolte nel precedente capitolo permettono di presentare qui una situazione schematica ideale, che viene spesso richiamata nelle argomentazioni probabilistiche.

Tale situazione schematica viene spesso richiamata con l'espressione "schema delle prove ripetute" o anche "schema di Bernoulli", dal nome del celebre matematico svizzero Jacob Bernoulli [1654-1705], che lo escogitò e sviluppò le argomentazioni matematiche relative.

Si supponga di trovarsi in uno dei casi, ben poco numerosi ed importanti, nei quali è possibile dare una prudente e ragionevole valutazione teorica a priori della probabilità di un dato evento aleatorio; precisamente si supponga che l'evento stesso possa essere il risultato di certe operazioni concrete o di certe manipolazioni su un sistema fisico ben conosciuto. Si supponga infine di ripetere varie volte l'operazione o la manipolazione che può dare luogo all'evento, in modo tale che non cambi da una volta all'altra la valutazione teorica a priori di probabilità dell'evento stesso.

Possiamo per esempio immaginare di lanciare varie volte uno stesso dado, verificando ogni volta che la caduta non ha modificato la struttura dell'oggetto, così da poter sempre ritenere ragionevolmente che la valutazione della probabilità della comparsa di ogni faccia sia ogni volta 1/6. Oppure possiamo pensare ad un'urna, che contiene varie palline bianche e nere, in numero da noi conosciuto e di considerare come evento l'estrazione di una pallina bianca; supponiamo di estrarre varie volte una pallina, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna e rimescolando.

Queste ed altre situazioni concrete che si possono immaginare forniscono degli esempi di realizzazione della situazione teorica schematica che abbiamo convenuto di chiamare "schema di Bernoulli".

Supponiamo ora di ripetere n volte la manipolazione o la operazione che può dar luogo all'evento aleatorio in questione, ed indichiamo con r il numero di volte in cui l'evento stesso si è verificato. Il numero:

$$f = r/n \tag{1}$$

viene chiamato "frequenza empirica" dei successi (su n prove).

In queste condizioni, l'esperienza conduce a formulare la seguente; LEGGE EMPIRICA DEI GRANDI NUMERI : Nelle condizioni dello schema di Bernoulli, al crescere del numero n delle prove, quasi sempre la frequenza empirica dei successi si avvicina di molto alla valutazione teorica a priori della probabilità del singolo evento "

2 - La legge dei grandi numeri che abbiamo enunciato poco fa è uno dei più importanti fondamenti sui quali si basa l'applicazione del calcolo delle probabilità alla realtà quotidiana, economica e fisica; essa fornisce anche una delle più importanti giustificazioni dell'importanza della statistica, per la conoscenza dei fenomeni collettivi. Conviene quindi soffermarsi un poco sull'enunciato e sul significato, con riserva tuttavia di ritornare

sull'argomento in seguito.

Osserviamo anzitutto che, nella denominazione stessa della legge, si parla di numeri "grandi"; questo concetto può apparire chiaro ad una analisi superficiale, ma non ammette precisazioni rigorose. Infatti la matematica non conosce numeri grandi o numeri piccoli, ed il giudizio sulla grandezza o sulla piccolezza di un determinato numero ha un significato strettamente psicologico e relativo ai casi concreti di cui si parla: per esempio il numero 43200 può essere considerato grande se esprime il numero degli esseri umani che costituiscono una folla che fa una dimostrazione politica, ma può essere considerato piccolo se esprime la durata in secondi di una vacanza: esso infatti corrisponde ad una mezza giornata.

Analoghe considerazioni possono essere svolte a proposito delle espressioni "quasi sempre " e "si avvicina di molto".

Pertanto occorre ammettere che la legge empirica dei grandi numeri, pur impiegando dei concetti che si ricollegano alla matematica, non può essere enunciata sotto la forma rigorosa che i teoremi della matematica debbono assumere.

3 - Abbiamo osservato poco sopra che la legge empirica dei grandi numeri non può essere formulata rigorosamente sotto forma di un teorema matematico. Effettivamente essa non ha la natura di teorema, perché non può essere dedotta logicamente da proposizioni precedentemente enunciate o da principi della logica, o da postulati matematici. Infatti se accadesse che in qualche caso tale legge non fosse rispettata, il fatto verrebbe considerato come straordinario, come eccezionale, o con altre espressioni iperboliche care ai giornalisti, ma non sarebbe considerato logicamente contraddittorio , o fisicamente impossibile .

Queste considerazioni giustificano il nome di "Legge empirica" che abbiamo dato qui alla proposizione; ricordiamo tuttavia che questa viene spesso richiamata con altri nomi o con altre espressioni: per esempio essa viene talvolta chiamata "Postulato empirico del caso" o anche semplicemente "legge del caso" o in altri modi.

Ovviamente non avrebbe senso proibire ad alcuno di impiegare le espressioni che ritiene giuste, nè intendiamo classificare sbrigativamente come errate le espressioni diverse dalla nostra. Tuttavia vorremmo riservare il nome di "postulato" ad una proposizione astratta che viene enunciata senza dimostrazione all'inizio di una teoria, e vorremmo evitare di parlare di "caso" per evitare di essere implicati nelle discussioni teoriche di cui abbiamo detto nel capitolo II. Tuttavia ribadiamo qui che la espressione da noi adottata vorrebbe mettere in evidenza il carattere del tutto particolare della proposizione, la cui validità discende esclusivamente dall'esperienza.

E d'altra parte noi pensiamo che questa proposizione sia fondamentale per giustificare le applicazioni del calcolo delle probabilità alla scienza ed alla pratica, così come per approfondire teoricamente certi significati delle scienze statistiche.

4 - Supponiamo di eseguire un certo numero n di prove o di manipolazioni di un determinato sistema fisico, nelle condizioni dello schema di Bernoulli; ciò implica, come si è già detto, che si conosca il sistema fisico su cui si opera, in modo da poter valutare la probabilità teorica a priori del singolo evento, che può avverarsi in ogni prova. Indichiamo con p tale valutazione teorica a priori della probabilità, e quindi indichiamo , secondo l'uso, con q la valutazione della probabilità del non avverarsi dell'evento. In forza degli sviluppi del Cap.VI si avrà

(2) $$p + q = 1.$$

Sia ora r un numero naturale non superiore ad n; si abbia cioè:

(3) $$0 \leq r \leq n.$$

Il fatto che su n prove l'evento considerato si sia verificato r volte costituisce ovviamente un secondo evento aleatorio, diverso da quello che può verificarsi in ogni singola prova.

Conveniamo di indicare con il simbolo $P(r)$ la valutazione della probabilità di questo secondo evento che consiste , ripetiamo, nel fatto che su n prove l'evento considerato si sia avverato r volte. Per la valutazione di $P(r)$ possiamo far riferimento agli sviluppi dei Capitoli VI e VII. Infatti dalle ipotesi relative allo schema di Bernoulli si può dedurre che i singoli eventi, che si possono verificare in ciascuna delle prove, possono essere giudicati indipendenti. Pertanto le valutazioni delle probabilità del fatto che l'evento E si sia verificato r volte, e quindi l'evento complementare E' sia sia verificato $(n-r)$ volte sono rispettivamente:

(4) $$p^r \quad ; \quad q^{(n-r)}.$$

Si osserva ora che vi sono molte modalità per il verificarsi r volte dell'evento E: il loro numero dipende dalle scelte degli r "posti" ai quali quali l'evento può avvenire, nella successione di n prove. E' noto che tale numero è dato dal coefficiente binomiale:

(5) $$C(n,r) = (n!)/\{(r!)\cdot(n-r)!\}$$

che fornisce appunto il numero di gruppi di r elementi scelti tra n.

Quindi la valutazione $P(r)$ cercata è data da:

(6) $$P(r) = (p^r)\cdot[q^{(n-r)}]\cdot[(n!)/\{(r!)\cdot(n-r)!\}]. \quad (0 \leq r \leq n).$$

OSSERVAZIONE - In base a calcoli algebrici elementari si verifica che la (6) fornisce, al crescere di r da 0 ad n, i termini dello sviluppo della potenza del binomio:

(7) $$(p + q)^n,$$

ordinati secondo le potenze crescenti di p (e decrescenti di q).

5 - Quando si fissi il numero n delle prove, il numero P(r) dato dalla (6) prende il suo valore massimo in corrispondenza al valore, o a certi valori, di r per cui è valida la relazione:

(8) $$|r - pn| < 1.$$

Precisamente, se il numero pn è intero, r ha questo valore; se pn non è intero il numero r, a cui corrisponde il massimo della funzione (6), può prendere uno dei due valori interi successivi nel cui intervallo è compreso pn, o anche entrambi.

Per esempio, nel caso del lancio di una moneta regolare, se l'evento E sul quale si scommette è "testa", si ha ovviamente:

(9) $$p = q = \tfrac{1}{2}.$$

Per n=14 il massimo valore di P(r) è assunto per r = 7 e vale:

(10) $$P(7) = 0.2094727.$$

Per un altro sistema fisico, per il quale si possa valutare la probabilità dell'evento con le procedure descritte, supponendo di aver ottenuto come valutazione il numero p = 0.25, su 15 prove il massimo della valutazione della probabilità P(r) si ottiene per r=3 e per r=4 ed è dato da:

(11) $$P(3) = P(4) = 0.22519...$$

Infine per un terzo sistema fisico, supponendo di aver valutato la probabilità a priori con 0.35, su 17 prove il massimo è ottenuto per r = 6 e vale:

$$P(6) = 19.90835;$$

e si ha che il 6 è l'estremo destro dell'intervallo ad estremi interi che contiene $0.35 \cdot 17$. Invece supponendo di aver valutato la probabilità a priori con 0.65, per 17 prove il massimo ha lo stesso valore precedente, ed è ottenuto per r = 11; ed 11 è l'estremo sinistro dell'intervallo ad estremi interi che contiene $0.65 \cdot 17$.

6 - E' noto che si può utilizzare la (6) anche per calcolare i valori di P(r) per r = 0 oppure per r = n, pur di accettare la nota convenzione che conduce a porre:

(12) $$0! = 1.$$

calcolando in questo modo il valore di P(14) in relazione al primo degli esempi presentati si ottiene:

(13) $$P(14) = 0.00006103516...$$

cioè un valore generalmente stimato molto piccolo. Si suole esprimere questo fatto dicendo che la serie di 14 lanci di moneta nella quale esce "testa" tutte le 14 volte è "praticamente impossibile".

Ritorneremo in seguito su questa espressione, e su altre analoghe nelle quali viene utilizzato l'avverbio "praticamente". Qui vorremmo limitarci ad additare un equivoco molto grave, che riguarda queste valutazioni di probabilità, e che conduce talvolta alcuni soggetti a comportamenti poco razionali, con conseguenze spesso molto spiacevoli.

Abbiamo detto esplicitamente poco sopra che il comparire r volte su n prove dell'evento considerato costituisce un secondo evento aleatorio, del quale abiamo valutato la probabilità con la (6).

Tuttavia avviene talvolta che i due eventi vengano confusi, e quindi si scambino le valutazioni di probabilità dell'uno con quelle dell'altro, nell'illusione di guadagni certi o quasi certi, e che tali invece non sono.

Rifacendoci all'esempio della moneta, trattato or ora, supponiamo che per 13 lanci successivi sia comparsa "testa"; vi sono allora dei soggetti che si impegnano per somme molto forti, scommettendo che al quattordicesimo lancio debba uscire "croce", perchè, argomentano, la valutazione della probabilità della serie di 14 "teste" è data da un numero molto piccolo;pertanto tale evento è "praticamente impossibile" e quindi è "praticamente certo" che al quattordicesimo lancio esca "croce".

La fallacia di questa argomentazione si rende evidente quando si osservi che la serie di 14 lanci, i primi 13 dei quali hanno dato "testa", non è più un evento aleatorio nel suo complesso: infatti gli esiti dei primi 13 lanci sono ormai oggetto di storia e non di scommessa; il solo evento sul quale ha senso scommettere ancora è l'esito dell'ultimo lancio, e per questo evento la valutazione della probabilità è uguale a quella del primo, cioè $\frac{1}{2}$.

Parafrasando una espressione di Laplace, si potrebbe dire che la moneta non ha nè memoria nè coscienza: quindi non si ricorda i risultati dei primi 13 lanci, e, se anche ciò potesse avvenire, non intende affatto ripartire i risultati con l'equità che lo scommettitore incauto si attende.

X VARIABILI ALEATORIE NEL CASO DISCRETO.

1 - Indicato con n un numero naturale maggiore di 1, consideriamo n numeri reali tutti diversi tra loro:

$$(1) \qquad x(i) \qquad (1 \le i \le n).$$

Siano poi dati n numeri reali positivi:

$$(2) \qquad p(i) > 0 \qquad (1 \le i \le n).$$

sottoposti alla condizione:

$$(3) \qquad \Sigma p(i) = 1 \qquad (1 \le i \le n).$$

I numeri (1) possono essere considerati come valori presi da una variabile x. In questo caso ogni numero (2) è visto come valutazione di probabilità del fatto che la variabile assume il valore (1) contraddistinto dall'indice i uguale a quello del numero (2). Tali eventi sono ovviamente incompatibili due a due, perché non può una variaile prendere contemporaneamente due valori diversi tra loro. Quindi la relazione (3) esprime che gli eventi ricordati costituiscono un insieme exaustivo. In queste condizioni si suol dire che x è una variabile aleatoria (o anche variabile casuale), e che i numeri (2) ne forniscono la "distribuzione di probabilità". Il fatto che i numeri (1) siano in numero finito viene espresso dicendo che la variabile aleatoria considerata è "discreta". Pertanto perchè si abbia una variabile aleatoria, occorre che sussista una corrispondenza tra gli elementi di due successioni: gli elementi dell'una sono considerati come valori presi dalla variabile, quelli dell'altra sono considerati come corrispondenti valutazioni di probabilità. Nel caso che stiamo trattando, le due successioni sono costituite da un numero finito di termini.

2 - In relazione ad una variabile aleatoria, del tipo che stiamo trattando, si possono definire alcuni numeri, che sono funzioni simmetriche delle due successioni che costituiscono la variabile aleatoria.

Un primo numero legato alla variabile è chiamato "valore medio" di questa; esso sarà qui indicato con il simbolo E(x), ed è definito dalla:

$$(4) \qquad E(x) = \Sigma p(i) \cdot x(i). \qquad (1 \le i \le n).$$

OSSERVAZIONE - Il numero E(x) viene anche chiamato "speranza matematica" della variabile aleatoria x. Noi preferiamo utilizzare questo nome per altre grandezze, che incontreremo in seguito.

Spesso anche si utilizza un'immagine fornita dalla Geometria e dalla Meccanica, immaginando che i numeri x(i) siano le ascisse di certi punti di una retta, nei quali sono appplicati dei pesi dati dai valori p(i) corrispondenti; in coerenza con questa immagine, E(x) fornisce l'ascissa del baricentro del sistema di punti, e quindi viene anche chiamato brevemente il "baricentro" della variabile aleatoria x.

3 - Data una variabile aleatoria x, è possibile definirne in infiniti modi un'altra y, che si dirà funzione della prima, ponendo:

(5) $y = f(x)$

ed associando ad ogni valore di y il medesimo valore della successione (2) originariamente associato al termine x della successione (1) che dà origine al valore di y, tramite la funzione f.

Data che sia la funzione f, è ovviamente possibile calcolare il valore medio della y. In particolare, per esempio, quando si abbia:

(6) $y = a\cdot x + b$, con a e b costanti,

si ha :

(7) $E(y) = a\cdot E(x) = b.$

Ponendo:

(8) $E(x) = m,$

si può costruire la variabile aleatoria:

(9) $y = x-m$

che viene chiamata "scarto" della prima. Dalle (4), (7), (9) si verifica che vale la relazione seguente:

(10) $E(y) = 0$.

Consideriamo ora il valore medio del quadrato della variabile y definita dalla (9), cioè il numero dato da :

(11) $E(y^2) = \Sigma p(i)\cdot[y(i)]^2$ $(1\leq i\leq n)$.

Eseguendo i calcoli si ottiene:

(12) $E(y^2) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$.

IL numero $E(y^2)$ viene chiamato "varianza" della variabile aleatoria x, ed indicato anche con il simbolo:

(13) var(x);

la determinazione positiva della radice quadrata di questo numero viene chiamata "scarto quadratico medio" della variabbile aleatoria x, ed indicata tradizionalmente col simbolo $\sigma(x)$, ponendo quindi:

(14) $\{\sigma(x)\}^2 = E(y^2)$.

D'ora innanzi scriveremo semplicemente σ al posto di $\sigma(x)$, quando non vi sia dubbio che si sta parlando dello scarto quadratico medio della variabile che prendiamo in considerazione.

4 - Lo scarto quadratico medio σ di una variabile aleatoria x è di particolare importanza per l'enunciazione e la dimostrazione di fondamentali proposizioni riguardanti la statistica ed il calcolo delle probabilità. Una prima proposizione importante in questo argomento viene chiamata "Teorema di Bienaymé-Cebicev". Per la sua dimostrazione, indichiamo

con t un numero reale positivo, ed indichiamo col simbolo:

(15) $$P\{|y|\geq t\sigma\}$$
la valutazione della probabilità che uno scarto y sia maggiore di $t\sigma$ in valore assoluto.

Vale allora il:

Teorema (di Bienaymé-Cebicev) - Sussiste la relazione:

(16) $$P\{|y|\geq t\sigma\} \leq 1/t^2.$$
Dim. Per la dimostrazione indichiamo rispettivamente con:

(17) $$y'(j) \quad , \quad p'(j)$$
i valori dello scarto (se ne esistono) che sono in valore assoluto maggiori di $t\sigma$, e le corrispondenti valutazioni di probabilità. Si avrà quindi, per ogni indice j:

(18) $$\{y'(j)\}^2 \geq (t\sigma)^2.$$
Indichiamo poi col simbolo:

(19) $$\Sigma' p'(j)\cdot\{y'(j)\}^2$$
la somma dei quadrati degli scarti, limitata a quei soli addendi per i quali vale la (18).

Si ha ovviamente:

(20) $$(t\sigma)^2\cdot\Sigma' p'(j) \leq \Sigma' p'(j)\cdot\{y'(j)\}^2 \leq \Sigma p(i)\cdot\{y(i)\}^2 = \sigma^2.$$
Ora, in forza di ciò che è stato dimostrato nel Cap.VI, la somma:

(21) $$\Sigma' p'(j) \quad .$$
fornisce la valutazione della probabilità che almeno uno scarto sia, in valore assoluto, non minore di $t\sigma$; e da questa osservazione e dalla (20) segue il teorema.

5 - A partire dalla successione (2) è possibile costruirne un'altra, ponendo:

(22) $$F(i) = \Sigma p(k) \qquad (1\leq k\leq i);$$
in forza delle osservazioni fatte sopra (paragrafo 1), e con ragionamento analogo a quello già svolto, il valore $F(i)$ fornisce la valutazione della probabilità che la variabile aleatoria assuma uno dei valori (1) contrassegnato con indice non superiore ad i.

I numeri (22) possono essere considerati come valori assunti da una funsione, che viene chiamata "funzione di ripartizione" della probabilità; la funzione è definita sull'insieme degli interi naturali da 1 ad n, crescente con l'indice i, ed ha valori sono compresi tra zero ed 1.

Si ha facilmente :

(23) $$p(i) = F(i) - F(i-1) \quad (1<i\leq n) \quad ; \quad F(n) = 1.$$

1 - Gli sviluppi del Capitolo precedente possono essere applicati in particolare al caso delle prove ripetute, di cui abbiamo detto nel Cap.IX.

Infatti, nella situazione schematica ivi illustrata, si può prendere in considerazione una variabile aleatoria; ogni valore di questa (ovviamente intero) rappresenta il numero di successi, cioè il numero r di volte in cui si è presentato l'evento aleatorio E in discorso.

Tale variabile aleatoria può assumere quindi (n+1) valori e precisamente:

(1) $0,1,2,.......,n$

e le corrispondenti valutazioni P(r) di probabilità sono fornite dalla formula (6)-IX:

(2) $P(r) = (p^r)\cdot[q^{(n-r)}]\cdot[(n!)/\{(r!)\cdot(n-r)!\}]$ $(0\le r\le n)$.

Per la valutazione del valore medio e dello scarto quadratico medio di questa variabile possiamo rifarci alla osservazione del Cap. IX, par. 4.

Ivi abbiamo osservato che la (2) fornisce gli (n+1) termini dello sviluppo della potenza n-esima del binomio (p+q).

Pertanto si può scrivere anche, indicando con t un numero reale qualunque:

(3) $(tp+q)^n = q^n + \Sigma(t^r)\,P(r)$ $(1\le r\le n)$.

Calcolando la derivata rispetto a t di entrambi i membri di questa equazione si ottiene:

(4) $np\cdot[(tp+q)^{(n-1)}] = \Sigma r\cdot[t^{(r-1)}]\cdot P(r)$ $(1\le r\le n)$;

ponendo in questa t=1, e ricordando che è p+q = 1 si ottiene:

(5) $np = E(r)$.

Calcolando le derivate di entrambi i membri della (4) rispetto a t, e tenendo conto della (12)-X si ha, per la variabile scarto, (r-np) il valore:

(6) $E[(r-np)^2] = npq$.

2 - Sempre rimanendo nella situazione dello schema delle prove ripetute, chiamiamo "frequenza empirica" dei successi il numero f definito dalla:

(7) $f = r/n$

e chiamiamo "scarto relativo" la differenza s tra la valutazione della probabilità di ogni singolo evento e la frequenza empirica, ponendo cioè:

(8) $s = f - p = (r-np)/n$.

Da questa relazione e dalla (6) si ottiene:

(9) $E(s^2) = E[(r-np)^2]/n^2 = pq/n$.

Questo è dunque lo scarto quadratico medio σ della variabile casuale "scarto relativo".

Ricordiamo ora il teorema di Bienaymé-Cebicev, che fornisce una limitazione della valutazione della probabilità che si abbia uno scarto y in valore assoluto maggiore di $t\sigma$. Si ha :

(10) $$P[|y|\geq t\sigma] \leq 1/t^2.$$

Ponendo in questa:

(11) $$t\sigma = \delta \quad \text{e quindi} \quad 1/t = \sigma/\delta$$

e ponendo al posto di σ^2 il valore dato dalla (9), ed al posto di y lo scarto s dato dalla (8), si ottiene:

(12) $$P(|s|\geq\delta) \leq pq/n\delta^2.$$

Si deduce da qui che, fissato comunque un numero positivo δ, la valutazione della probabilità che lo scarto relativo superi δ in valore assoluto tende a zero il tendere all'infinito del numero n delle prove.

Questa proposizione viene di solito enunciata facendo riferimento alla valutazione della probabilità dell'evento complementare di quello considerato, cioè all'evento che si avvera se si ha:

(13) $$|s| = |f - p| < \delta.$$

Pertanto la valutazione della probabilità che si avveri la (13) tende ad 1. Si ha così il

Teorema (di Bernoulli)- Nelle condizioni dello schema delle prove ripetute, al crescere del numero n delle prove, tende ad 1 la probabilità che il valore assoluto dello scarto relativo:

(14) $$|r/n - p|$$

diventi minore di un numero positivo δ comunque fissato.

3 - Il teorema ora dimostrato fornisce una limitazione alla valutazione della probabilità dell'evento aleatorio che consiste nell'avverarsi della (13). Tale evento è diverso da quelli considerati finora in relazione allo schema delle prove ripetute; essi sono anzitutto l'evento E, che può verificarsi in ogni prova, e la cui probabilità ha la valutazione p, e poi l'evento che avvengano esattamente r successi sulla serie di n prove, la cui valutazione di probabilità è data dalla (2).

Osserviamo esplicitamente che il teorema di Bernoulli non fornisce affatto una dimostrazione matematica della legge empirica dei grandi numeri, come qualche osservatore superficiale potrebbe credere: infatti il teorema non dimostra che la differenza (14) tende a zero, ma solo che tende ad 1 la probabilità che ciò si avveri. Il legame tra la la deduzione teorica ed il suo avverarsi nella realtà materiale rimane sempre costituito da una legge empirica: sarebbe infatti ben strano che si potesse dedurre matematicamente il verificarsi necessario di un evento aleatorio.

Tuttavia il teorema di Bernoulli permette di enunciare una legge empirica che fa riferimento non ad una qualunque valutazione di probabilità (come abbbiamo visto nel Cap.IX), ma soltanto in relazione ad alcuni particolari valori di questa valutazione, cioè ai valori 0 ed 1, che, nel Cap.III, abbiamo associato al giudizio di impossibilità o rispettivamente di certezza dell'avverarsi di un certo evento aleatorio. Possiamo quindi limitarci ad enunciare la seguente :

Legge empirica attenuata dei grandi numeri - Nelle condizioni dello schema delle prove ripetute, un evento la cui probabilità è stata valutata molto vicina ad 1 avviene quasi sempre; oppure un evento la cui probabilità è stata stimata molto vicina a zero non avviene quasi mai.

Ripetiamo qui ciò che abbiamo già detto nel Cap.IX: non è possibile precisare rigorosamente il significato delle espressioni "molto vicina ad 1 oppure a zero". Abbiamo già detto che qualcuno parla di eventi "praticamente certi" oppure "praticamente impossibili". Ma espressioni di questo tipo non hanno significato matematico. Pertanto le decisioni umane contengono sempre un elemento di giudizio soggettivo che non è ulteriormente precisabile con la sola matematica. Tuttavia, come si è già osservato, questa può aiutare a conseguire il massimo di razionalità possibile in condizioni di informazione incompleta.

1 - Nelle pagine precedenti abbiamo toccato più volte l'argomento delle scommesse, cioè di quei contratti aleatori che si stipulano, per così dire, per sfidare il caso, cioè per incassare delle somme di denaro a titolo di vincite senza dare in contraccambio dei beni o del lavoro ma soltanto rischiando di perdere certe somme di denaro.

Tali sono, per esempio, la scommesse che si fanno con il gioco dei dadi, o con i giochi d'azzardo con le carte, o giocando al Lotto, o acquistando biglietti di lotterie varie, o manovrando una di quelle numerose macchine che vengono chiamate "mangia soldi", o prendendo parte alle scommesse che avvengono nelle bische autorizzate (chiamate abitualmente "casinò"), nelle quali funzionano, tra l'altro, certe macchine che vengono chiamate "roulettes".

Analizzeremo il comportamento dello scommettitore nel caso in cui il contratto aleatorio (scommessa) ha come oggetto un evento che è il risultato di determinate manipolazioni su sistemi fisici ben conosciuti, come dadi, monete, roulettes &c. Lasceremo da parte altri tipi di scommesse, come, per esempio quelle stipulate sui risultati delle corse di cani e di cavalli, o di automobili o altre, in cui il risultato dipende dal comportamento di esseri viventi non completamente controllabili dallo scommettitore.

Prenderemo quindi in considerazione i casi in cui è possibile calcolare una valutazione a priori teorica della probabilità dell'evento aleatorio (oggetto della scommessa) mediante il computo dei casi favorevoli e dei casi possibili; naturalmente con un ragionevole controllo della circostanza fondamentale (di cui abbiamo già detto nel Cap.VIII,3) che questi ultimi siano tutti ugualmente possibili.

Indichiamo con p la valutazione a priori della probabilità dell'avverarsi dell'evento che è oggetto della scommessa, ed indichiamo con S la somma che lo scommettitore potrebbe vincere se si verifica l'evento suddetto: se esce un certo numero o un certo colore alla roulette, se esce un certo ambo o una certa combinazione di numeri su una determinata ruota del Lotto, se viene estratto un certo biglietto della lotteria &c.

Si suol chiamare "speranza matematica" dello scommettitore il numero:

$$pS, \tag{1}$$

prodotto dell'ammontare della eventuale vincita per la valutazione teorica a priori della probabilità dell'evento.

Indichiamo con m la somma che lo scommettitore versa per poter stipulare il contratto: prezzo del biglietto della lotteria, posta della scommessa.

Chiameremo bilancio globale dello scommettitore il numero:

$$V = -m + pS \tag{2}$$

che risulta dalla differenza tra la speranza matematica e la posta da versarsi per stipulare la scommessa.

Si suol dire che la scommessa è "equa", o che il gioco è "equo" se si ha:

$$V = 0, \tag{3}$$

cioè se la posta che lo scommettitore deve versare per stipulare il contratto è esattamente uguale alla speranza matematica.

E' noto che in quasi tutti i casi in cui un singolo scommettitore stipula il contratto aleatorio con un tenitore di banco (biscazziere, casinò, lo Stato) il contratto non è equo, perchè lo scommettitore paga di più dell'ammontare della speranza matematica; quindi il bilancio del singolo è negativo, cioè si ha:

$$V < 0. \tag{4}$$

Corrispondentemente è positivo il bilancio del tenitore di banco; e ciò gli permette di lucrare sul grande giro di denaro che abitualmente si verifica attorno alle case da gioco.

Nel caso del gioco del Lotto le perdite dello scommettitore sono molto grandi: per esempio lo Stato paga 250 volte la posta per l'ambo, mentre gli ambi possibili con 90 numeri sono 4005, e quelli che si possono fare con i cinque numeri estratti sono 10.. Quindi il bilancio globale dello scommettitore è, in questo caso:

$$-1 + 250\cdot 10/4005 = -0.3757803 \tag{5}$$

per ogni lira versata.

Bilanci ancora più sfavorevoli si hanno per le altre scommesse connesse con il gioco del Lotto: terno, quaterna, cinquina.

Ciò tuttavia non distoglie il giocatore, che viene spesso abbagliato dalla grandezza della possibile vincita, oppure cede alla spinta della propensione al rischio, di cui abbiamo già detto (Cap.III,2).

2 - Abbiamo considerato finora il bilancio dello scommettitore tenendo conto della valutazione teorica a priori della probabilità di un evento aleatorio nel caso di una singola scommessa. I problemi possono essere ulteriormente approfonditi quando si supponga che le scommesse, riguardanti un determinato evento aleatorio, vengano ripetute.

A questo proposito infatti occorre ricordare che le poste debbono essere versate in anticipo se si vuole stipulare un contratto aleatorio: ciò avviene in generale per le scommesse, ed avviene sempre per i contratti di assicurazione. Ora può accadere che, con il ripetersi degli eventi sfavorevoli, lo scommettitore si trovi a non poter più pagare le poste; si trovi cioè ad essere rovinato, perchè ha esaurito tutto il proprio patrimonio e le possibilità di credito a causa di quella che viene spesso chiamata una "serie nera".

Consideriamo uno scommettitore, il quale scommette ripetutamente su un determinato evento aleatorio E, nelle condizioni dello schema di Bernoulli, e siano rispettivamente p e q le valutazioni delle probabilità di successo e di insuccesso; come abbiamo visto (Cap.VI,1) si ha:

$$p + q = 1. \tag{6}$$

Indichiamo con x il patrimonio di cui lo scommettitore dispone ad un determinato momento; supponiamo che x sia un numero intero naturale,e supponiamo che per ogni evento favorevole o sfavorevole la vincita, o rispettivamente la perdita, siano uguali a +1 od a -1; quindi il suo patrimonio crescerà o diminuirà di 1, a seconda dell'esito di ogni partita o scommessa. Indichiamo con n un numero naturale e con il simbolo:

$$(7) \qquad P(x,n)$$

la valutazione della probabilità della rovina dello scommettitore, che dispone del patrimonio x, dopo n scommesse.

Per la funzione $P(x,n)$ vale la seguente equazione fondamentale:

$$(8) \qquad P(x,n) = p \cdot P(x+1,n-1) + q \cdot P(x-1,n-1).$$

Infatti se egli gioca una ulteriore partita, egli può vincerla o perderla, e corrispondentemente il suo patrimonio accrescersi o diminuire di 1, con valutazioni di probabilità rispettivamente p e q; d'altra parte egli ha avvicinato di un passo la propria rovina, che dista ora di (n-1) passi e non più di n.

Consideriamo ora fissato x; i valori di P costituiscono allora una successione superiormente limitata ed ovviamente non decrescente con n: infatti al crescere indefinito del numero delle partite future non diminuisce certo il rischio della rovina. Pertanto la sucessione ha un limite per $n \to \infty$, limite che indicheremo semplicemente con il simbolo $P(x)$.

Pertanto, dalla (8), passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene:

$$(9) \qquad P(x) = p \cdot P(x+1) + q \cdot P(x-1).$$

Questa è un'equazione alle differenze finite omogenea, del secondo ordine nella funzione incognita P della variabile intera x.

Per la soluzione della (9) occorre distinguere due casi:

i) si ha :

$$(10) \qquad p \neq q.$$

Allora. indicate con h e k due costanti, la soluzione generale della (9) è data dalla formula:

$$(11) \qquad P(x) = h + k \cdot (q/p)^x.$$

ii) si ha:

$$(12) \qquad p = q = \tfrac{1}{2}.$$

Allora la soluzione generale della (9) è:

$$(13) \qquad P(x) = h + k \cdot x.$$

3 - Le soluzioni generali della (9) possono essere ulteriormente precisate quando si posseggano ulteriori informazioni sulle circostanze nelle quali le scommesse vengono stipulate. Supponiamo dunque che il giocatore scommetta contro un avversario, il quale dispone a sua volta di un patrimonio iniziale y, e scommette ovviamente sull'evento complementare E', valutando la probabilità di questo con il numero q; e supponiamo infine che ogni accrescimento di un'unità del patrimonio di uno degli scommettitori porti ad una diminuzione del patrimonio dell'altro di una uguale quantità.

In queste ipotesi le costanti h e k che entrano nelle (11) e (13) possono essere valutate osservando che si ha ovviamente $P(0) = 1$, perchè se il

giocatore non ha alcun patrimonio egli è rovinato all'inizio, per definizione; inoltre si ha $P(x+y) = 0$, perchè quando il giocatore ha vinto all'avversario tutto il patrimonio di costui, il gioco è finito, perché l'avversario è rovinato. Introducendo questi valori nelle (11) e (13) si trova:
nel caso in cui sia $p \neq q$

(14) $$P(x) = \{[(q/p)^x]-[(q/p)^{(x+y)}]\}/\{1-[(q/p)^{(x+y)}]\};$$
nel caso in cui valga la (12):

(15) $$P(x) = 1-x/(x+y) = y/(x+y).$$

In questo secondo caso, quando si scambino tra loro i ruoli dei due scommettitori, si ha anche:

(16) $$P(y) = x/(x+y).$$

Si conclude pertanto che, nelle ipotesi (12), le valutazioni di probabilità di rovina di ciascun giocatore sono inversamente proporzionali ai patrimoni con i quali essi iniziano la serie di scommesse.

3 - La possibilità del verificarsi di una "serie nera" al crescere del numero delle partite può essere accertata anche fondandosi sugli sviluppi del Cap. XI. Ivi, al paragrafo 1, abbiamo valutato la varianza della variabile scarto, data da:

(17) $$y(r)= r-np,$$
che esprime la differenza tra il numero dei successi nella serie di n prove ed il valore pn, che, se è intero, fornisce il massimo della valutazione di probabilità che abbiamo indicato con $P(r)$, data dalla (6) del Cap. IX, e se non è intero fornisce un intervallo in cui si trova il massimo, o si trovano i massimi.

Il valore assoluto dello scarto (17) può essere ragionevolmente assunto come indice della lunghezza di una "serie nera", cioè di una serie di risultati il cui numero si distacca da quello a cui compete il massimo della valutazione di proabilità. La (6) del Cap. Xi dà:

(18) $$E[(r-pn)^2] = npq;$$
si fissi ora comunque un numero reale positivo A, comunque grande. Si verifica che al crescere di n, non possono tutti gli scarti $y(r)$ essere in valore assoluto minori di A. Se infatti così fosse si avrebbe:

(19) $$E[(r-pn)^2] = \Sigma[y(r)]^2\cdot P(r) < A^2\cdot\Sigma P(r) = A^2;$$
e ciò contraddice alla (18), in base alla quale si ha:

(20) $$\lim E[(r-np)^2] = \infty \quad \text{per } n\to\infty.$$

1 - Il concetto di variabile aleatoria (o casuale), che abbiamo introdotto nel Cap.X, può essere esteso in vari modi. Tratteremo qui i casi più elementari di variabili aleatorie continue; a queste si può pensare di giungere immaginando che una variabile aleatoria possa avere infiniti valori, e modificando opportunamente il concetto di valutazione di probabilità. Gli sviluppi che si ottengono permettono di trattare in modo comodo certi prolemi che, con le procedure classiche, darebbero luogo a calcoli gravosi. Si segue quindi una strada analoga a quella che si batte utilizzando i concetti del continuo , e gli strumenti dell'Analisi matematica, nell'ambito della Matematica finanziaria: è noto infatti che le grandezze considerate da questa branca della Matematica sono somme di denaro e date (o durate); entrambe queste grandezze sono rappresentate da numeri interi, e quindi si potrebbe dire che gli strumenti fondamentali della Matematica finanziaria sono i numeri interi. Si utilizza tuttavia lo schema del continuo in molti problemi di questa scienza, perché tale schema è comodo, permette delle enunciazioni sintetiche, permette di utilizzare gli strumenti concettuali ed i simboli dell'Analisi matematica, e consente infine di tenere sotto controllo gli errori che si commettono, giungendo così comodamente a risultati chiari e significativi.

Il significato e la portata di queste considerazioni saranno ulteriormente chiariti nel seguito, in occasione della presentazione di esempi di problemi classsici, riguardanti variabili aleatorie, che vengono trattati mediante i concetti qui esposti.

2 - Sia $f(x)$ una funzione reale e positiva, definita per ogni valore reale della variabile x. Supponiamo che esista l'integrale improprio della $f(x)$, esteso da $-\infty$ a $+\infty$, e si abbia:

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Indichiamo poi con $F(x)$ la funzione definita dalla formula:

(2) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

per la quale si ha quindi:

(3) $$\lim F(x) = 0 \quad , \text{ per } x \to -\infty$$
$$\lim F(x) = 1 \quad , \text{ per } x \to +\infty.$$

Dati ora due numeri reali, a e b , tali che sia :

(4) $$a < b,$$

consideriamo come evento aleatorio il fatto che la variabile x assuma un valore soddisfacente alle limitazioni:

(5) $a \le x \le b$,

e supponiamo inoltre che la valutazione della probabilità di tale evento sia data da:

(6) $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$.

In queste ipotesi, si suol dire che la funzione $f(x)$ è la "densità di probabilità" della variabile x, e che la funzione $F(x)$ è la "funzione di ripartizione" di tale variabile.

Ancora in queste ipotesi, il valore di $F(a)$ rappresenta la valutazione della probabilità che la variabile x assuma un valore appartenente all'intervallo:

(7) $-\infty < x \le a$.

Ciò che precede viene spesso esposto in forma approssimata e poco precisa, ma suggestiva, dicendo che la valutazione della probabilità che la varibile aleatoria x assuma un valore appartenente all' "intervallo infinitesimo" compreso tra x ed x+dx è fornita dal prodotto:

$$P(x,x+dx) = f(x)\cdot dx.$$

Espressioni cosiffatte sono giustificate, in parte almeno, dalla ipotesi sottintesa che la funzione $f(x)$ sia continua nei punti presi in considerazione e che si possa quindi applicare alla (6) il teorema che spesso viene indicato come "teorema fondamentale del calcolo integrale".

3 - Estendendo in modo ovvio gli sviluppi del Cap. X, si possono definire dei parametri collegati con la variabile aleatoria continua ora definita.

Supponendo che esista l'integrale improprio:

(8) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x\cdot dx = E(x)$$

il suo valore viene chiamato "valore medio" della variabile aleatoria x.

In modo analogo si definisce una variabile aleatoria y che viene chiamata "funzione" della x, che viene precisata ponendo:

(9) $y = g(x)$

(essendo "g" il simbolo di una qualunque funzione) ed associando ad ogni valore della x il valore della funzione $f(x)$ di distribuzione di probabilità.

In particolare quindi, quando si abbia:

(10) $y = a\cdot x + b$, con a e b costanti,

si avrà:

(11) $E(y) = a\cdot E(x) + b$.

Ponendo anche ora:

(12) $$m = E(x),$$
si può definire la variabile aleatoria :

(13) $$y = x - m$$
che viene chiamata "scarto" della prima.

Supponendo che esista l'integrale improprio:

(14) $$E(y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(x) \cdot dx,$$

questo numero viene anche in questo caso chiamato "varianza" della variabile aleatoria x, e la determinazione positiva della radice quadrata di tale numero viene chiamata "scarto quadratico medio" ed indicata tradizionalmente con il simbolo "$\sigma(x)$", ponendo quindi:

(15) $$\{\sigma(x)\}^2 = E(y^2).$$

4 - Un esempio, particolare ma abbastanza suggestivo, di variabile aleatoria continua si ha nel caso seguente:supposte valide le relazioni (4), si ponga:

(16)
$$\begin{array}{lll} \text{per} & x < a & f(x) = 0 \\ \text{per} & a \le x \le b & f(x) = 1/(b-a) \\ \text{per} & x > b & f(x) = 0. \end{array}$$

Si dice abitualmente che la funzione f(x) definita dalle (16) fornisce una "distribuzione uniforme di probabilità" nell'intervallo dato dalle (4).

Conseguentemente, in questo caso la funzione di ripartizione definita dalla (3) è determinata dalle seguenti condizioni:

(17)
$$\begin{array}{lll} \text{per} & x < a & F(x) = 0 \\ \text{per} & a \le x \le b & F(x) = (x-a)/(b-a) \\ \text{per} & x > a & F(x) = 1. \end{array}$$

In queste ipotesi, dalla (6) si trae che, dati due numeri c, d tali che si abbia:

(18) $$a \le c < d \le b,$$
la valutazione della probabilità che la variabile aleatoria x prenda un valore contenuto nell'intervallo di estremi c,d è propozionale alla lunghezza dell'intervallo stesso; si ha cioè:

(19) $$P(c \le x \le d) = (d-c)/(b-a).$$

I parametri caratteristici della distribuzione sono in questo caso:

(20) $E(x) = (a+b)/2 = m,$

e :

(21) $\sigma^2 = (b-a)^2/12.$

5 - Le considerazioni dei paragrafi precedenti si generalizzano senza difficoltà; si giunge così ai concetti di coppie, terne,..n-ple di variabili casuali continue, determinate dalle corrispondenti funzioni di densità di probabilità, che sono funzioni di due, tre, n variabili, sottoposte a certe condizioni le quali impongono che certi integrali doppi, tripli, n-pli esistano ed abbiano determinati valori. Tralasciamo di dare qui gli sviluppi generali di questi concetti, e ci limitiamo a presentare alcuni contesti classici, in cui questi vennero presentati e sviluppati. Infatti le considerazioni svolte poco sopra vengono spesso utilizzate in certi problemi classici della teoria delle probabilità, che vengono spesso richiamati parlando di "probabilità geometriche " o con espressioni analoghe.

Tratteremo qui qualche esempio di problemi di questo tipo, il che ci servirà per chiarire ulteriormente ciò che abbiamo detto all'inizio del capitolo.

Un primo esempio di problema caratteristico e classico è fornito dal cosiddetto problema del "bastone spezzato"; esso viene presentato in varie forme, per esempio nel modo seguente:

Si divide a caso un segmento in tre parti; valutare la probabilità che i tre segmenti così ottenuti possano essere lati di un triangolo.

La prima osservazione che si deve fare ad un enunciato di questo tipo è che esso non è determinato, perchè la espressione "si divide a caso" non è sufficiente per una trattazione matematica rigorosa. Per chiarire ulteriormente il problema si potrebbe immaginare il segmento materializzato con un bastone di lunghezza finita: per esempio 1 metro; di stabilire sul bastone una graduazione uniforme, per esempio in millimetri; di scegliere i punti di questa graduazione come punti di divisione e i numeri corrispondenti come coordinate dei punti. Poi di mettere in un'urna 1000 palline, indistinguibili al tatto, ognuna corrispondente ad un numero da 1 a 1000, e quindi ad un punto del bastone.

In queste condizioni, la estrazione di una pallina dall'urna potrebbe essere praticamente considerata come la identificazione di un punto del bastone; pertanto la valutazione della probabilità che un determinato punto cada in un determinato intervallo risulta proporzionale alla lunghezza dell'intervallo stesso, stante la ipotesi di distribuzione uniforme dei punti di divisione sul bastone.

Immaginando di far crescere indefinitamente i punti di divisione uniforme sul bastone, con un elementare passaggio al limite, si giunge a costruire il concetto di variabile aleatoria continua che, in questo caso, ha distribuzione uniforme.

E' chiaro d'altra parte che, decidendo di scegliere con altre procedure i punti di divisione, si debbano ottenere dei risultati diversi per quanto riguarda la soluzione del problema enunciato. Questa osservazione giustifica l'affermazione, fatta poco fa, secondo la quale la espressione "dividere a caso" non ha significato preciso. Infatti tale espressione lascia indeterminata la procedura secondo la quale si scelgono i punti di divisione, e quindi, nel passaggio al limite di cui abbiamo detto, lascia indeterminta la funzione f(x), che fornisce la densità di probabilità. Occorre quindi fare una scelta ulteriore, ed è chiaro che, in generale, con diverse scelte si avranno diversi risultati.

Per ottenere la risposta al problema enunciato indichiamo con x ed y le lunghezze dei segmenti parziali, che sono stati ottenuti con la divisione "a caso" di cui si è detto.

Pertanto i lati del triangolo che si vuole costruire con i pezzi ottenuti avranno lunghezze:

(22) $x,\ y,\ 1-(x+y) \quad ; \quad x,\ y,\ 1-(x+y) > 0.$

Le Geometria elementare dimostra che condizione necessaria e sufficiente perché tre segmenti siano lati di un triangolo è che ognuno sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Tenendo conto delle (22), queste condizioni conducono alle limitazioni:

(23) $0 < x < \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < y < \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < x+y < 1.$

Scegliamo ora nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y . In questo sistema, un punto le cui coordinate x,y soddisfano alle (22) appartiene al triangolo avente come vertici di punti di coordinate:

(24) $(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,0);$

ed un punto le cui coordinate soddisfano alle (23) appartiene al triangolo avente come vertici i punti di coordinate:

(25) $(0,\frac{1}{2}) \quad , \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad , \quad (\frac{1}{2},0)$

Richiamiamo ora i cenni fatti sopra: i due numeri x,y possono essere considerati come valori di due variabili aleatorie; se formuliamo l'ipotesi fondamentale che esse siano indipendenti, e che ciascuna di esse abbia distribuzione uniforme, allora la valutazione di probabilità che il punto di coordinate x,y, appartenente al triangolo di vertici (24), appartenga in particolare al triangolo di vertici (25) è fornita dal rapporto delle aree dei due triangoli; rapporto che vale 1/4, come si verifica facilmente.

Ripetiamo che questa valutazione dipende in modo essenziale dalla scelta della funzione di densità di probabilità di ogni singola variabile e dalla ipotesi che le due variabili siano indipendenti. Si tratta di ipotesi che venivano considerate come "naturali" dagli autori classici, e che vengono considerate come ovvie da coloro che di solito enunciano il problema considerato; ma ciò non toglie il carattere di ipotesi che esse hanno, e quindi ciò non sopprime la opportunità di enunciarle in modo esplicito quando si voglia presentare una trattazione rigorosa del problema.

6 - Un secondo problema classico della teoria delle proabilità nel continuo viene chiamato "problema dell'ago" o anche "problema di Buffon" dal nome dello scienziato che lo ha formulato e risolto [George-Louis Leclerc de Buffon . 1707-1788]. Tale problema potrebbe essere presentato nella forma seguente:

" E' dato un pavimento sul quale sono tracciate delle linee rette, parallele tra loro, a distanza costante l'una dall'altra. Si indichi con 2d tale distanza, e si lasci cadere sul pavimento un ago, la cui lunghezza è 2d. Valutare la probabilità che l'ago cada a cavallo di una delle linee rette tracciate sul pavimento."

Indicata con y la distanza del punto medio dell'ago caduto dalla retta più vicina, ed indicato con α l'angolo che l'ago forma con le rette, si ha chiaramente che l'ago interseca una retta se sussiste la relazione:

(26) $$y < d\cdot\sin\alpha.$$

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, avente l'asse delle ascisse parallelo alle rette considerate, e consideriamo l'arco di sinusoide avente equazione:

(27) $$y = d\cdot\sin x \qquad (0\leq x\leq\pi).$$

La superficie della figura compresa tra l'asse delle ascisse e la curva (27) vale:

(28) $$d\cdot\int_0^\pi \sin x\cdot dx = 2\cdot d.$$

Un punto nell'interno di questa figura rappresenta una posizione di caduta dell'ago per la quale è soddisfatta la condizione (26). D'altra parte ogni posizione di caduta può essere rappresentata da un punto appartenente ad un rettangolo avente altezza d, e come base il segmento di lunghezza π.

Se supponiamo che valgano delle considerazioni di uniformità analoghe a quelle che abbiamo presentato e discusso nel paragrafo 4,la valutazione della probabilità P che si cerca è ovviamente fornita dal rapporto tra l'area calcolata con la (28) e quella del rettangolo avente π come base ed altezza d. Si avrà quindi:

(29) $$P = 2/\pi.$$

Questa celebre relazione ha dato luogo a varie considerazioni, non sempre accettabili. Ci fu persino chi propose di sfruttare questa relazione per ottenere una valutazione della costante di Archimede π in via sperimentale. A questo proposito pensiamo di poter osservare che la determinazione della costante π per questa via sarebbe sottoposta a tutti i rischi di incertezza di cui abbiamo parlato nel Cap. XI, quando abbiamo commentato il significato del teorema di Bernoulli. Aggiungiamo a queste considerazioni l'osservazione che l'approssimazione della determinazione di π che si potrebbe eventualmente ottenere sperimentalmente sarebbe anche strettamente collegata con la validità delle tecniche adottate per decidere sperimentalmente se l'ago cade oppure no a cavallo di una riga.

7 - Nelle pagine che precedono abbiamo insistito sul significato della scelta di una funzione di distribuzione (e quindi della funzione di ripartizione) per rendere preciso il significato della frase "scelta a caso". Per ribadire questi concetti riportiamo qui si seguito brevemente una discussione classica, relativa alle cosiddette "probabilità geometriche".

Si tratta del cosiddetto "Problema di Bertrand", che alcuni, per agioni che saranno presto intuite, richiamano anche con la espressione "Paradosso di Bertrand". [Joseph-Louis-François Bertrand. 1822-1900]. Il problema può essere brevemente formulato nel modo seguente:

" E' data un circonferenza, e si traccia "a caso" una corda. Valutare la probabilità che essa abbia lunghezza non minore di quella del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza".

Si constata facilmente che la valutazione dipende in modo essenziale dalla scelta della procedura che si segue per tracciare la corda, cioè dalla scelta della funzione di distribuzione di probabilità nell'insieme continuo a due dimensioni che si assume per rappresentare le corde della circonferenza considerata, che, per semplicità, supporremo di raggio unitario. Infatti si può anzitutto considerare un punto qualunque della circonferenza; le corde che soddisfano alla condizione del problema sono quelle che, in quel punto, formano un angolo non minore di 30 gradi con la tangente. Oppure si può considerare un diametro, scelto " a caso", della circonferenza, ed il fascio di rette perpendicolari a tale diametro. Le corde soddisfacenti alla condizione del problema appartengono al fascio del rette perpendicolari ed hanno distanza dal punto medio del triangolo non maggiore di ½. Infine si può prendere in considerazione il punto medio della corda considerata, ed osservare che le condizioni del problema sono soddisfatte se tale punto medio cade nell'interno di un cerchio concentrico con la circonferenza data ed avente raggio uguale ad ½. Si verifica che, in corrispondenza ad ognuna di queste procedure, si può determinare una scelta di funzione di distribuzione di probabilità che appare, in quel caso, come " naturale" e che porta a valutazioni di probabilità rispettivamente di 1/3, 1/2, 1/4.

Non intendiamo proseguire in questa discussione, perché pensiamo che gli esempi addotti siano sufficienti per chiarire i problemi logici ed epistemologici sottostanti a certe situazioni che i classici avevano sbrigativamente risolto con sonsiderazioni che venivano presentate come "intuitive" oppure addirittura " naturali". Gli sviluppi dei capitoli successivi permetteranno di dare ulteriori precisazioni nei riguardi dei problemi qui trattati.

1 - Presenteremo alcuni casi di variabili aleatorie continue che hanno grande importanza nella pratica delle applicazioni del calcolo delle probabilità. La loro considerazione ci fornirà ulteriori occasioni per analizzare criticamente i concetti che abbiamo finora presentato, e per valutare il significato e la portata delle applicazioni delle teorie alla pratica delle scienze diverse dalla Matematica pura.

Un primo esempio di notevole importanza è fornito dal problema trattato in un quadro schematico che viene indicato spesso con l'espressione di "schema degli eventi rari" o anche "schema di Poisson"[Simeon Denis Poisson. 1781-1840]..

Tale problema potrebbe essere trattato come un caso limite di quelli relativi alla distribuzione di Bernoulli; ma noi preferiamo presentarlo qui in forma autonoma, per dare qualche idea su impostazioni teoriche diverse da quelle finora considerate. Ovviamente, la validità della applicazione pratica degli sviluppi teorici che daremo è fondata essenzialmente sulla validità dei giudizi relativi alla verosimiglianza delle ipotesi enunciate.

Supponiamo che si abbia a che fare con dei fenomeni aleatori che si presentano successivamente nel tempo: per esempio arrivi di clienti a certi sportelli, chiamate telefoniche. Tali fenomeni sono considerati indipendenti tra loro: ciò significa che l'avverarsi di uno dei fenomeni in un istante t non influisce sulla valutazione di probabilità dell'evento che un altro fenomeno si verifichi in un altro istante qualunque.

Supponiamo che abbia senso parlare di fenomeni "rari", e che abbia senso parlare di intervalli di tempo "brevi", in relazione al verificarsi dei fenomeni stessi. Naturalmente la validità di questi giudizi dipende in larga misura dai singoli fenomeni e dalla valutazione soggettiva data dal singolo osservatore, che intende inquadrarli teoricamente.

Stabiliamo una coordinata temporale, che indicheremo con t, e che determineremo a partire da un certo istante iniziale; pertanto nel seguito si avrà sempre:

$$(1) \qquad t \geq 0;$$

in tutto il seguito, l'istante corrispondente al valore t della coordinata temporale sarà indicato brevemente con l'espressione "istante t". Indicata con a una durata che verrà considerata come "breve" o anche "piccola" (con le avvertenze or ora esposte), supponiamo che la valutazione della probabilità che un evento si produca durante un periodo di tempo breve, di durata a, sia proporzionale alla durata del periodo stesso; in altre parole, supponiamo che esista una costante k, caratteristica del fenomeno che si considera, tale che la valutaziione $p(a)$ della probabilità che un evento avvenga in un qualunque intervallo di tempo di durata a sia:

$$(2) \qquad p(a)=k\cdot a.$$

Corrispondentemente la valutazione della probabilità che nel breve periodo di durata a non avvenga alcun evento sarà data da:

(3) $q(a) = 1-p(a) = 1-k\cdot a$

Indichiamo ora con $Q(t)$ la valutazione della probabilità che nel periodo di tempo dall'istante 0 all'istante t non avvenga alcun evento; per la funzione $Q(t)$ vale ovviamente la relazione:

(3) $Q(t+a) = Q(t)\cdot(1-k\cdot a);$

infatti l'evento aleatorio che si intende verificato se non avviene alcun evento elementare nel periodo da 0 a $t+a$, è ovviamente il prodotto logico di due eventi aleatori indipendenti per ipotesi: quello che si verifica se non avviene alcun evento elementare dal'istante 0 all'istante t, e quello che si verifica se non avviene alcun evento elementare nel breve periodo di durata a, successivo all'istante t. Si possono quindi applicare a questo caso gli sviluppi del Cap.VII.

Dalla (3) si trae :

(4) $\{Q(t+a)-Q(t)\}/a = -k\cdot Q(t).$

Supponiamo ora che la funzione Q sia dotata di derivata, per ogni valore di t appartenente all'intervallo infinito (1), ed indichiamo col simbolo Q' tale derivata; dalla (4), passando al limite per $a \to 0$ si giunge alla equazione differenziale:

(5) $Q' = -k\cdot Q,$

la cui soluzione è fornita dalla famiglia di funzioni:

(6) $Q(t) = A\cdot\exp(-k\cdot t)$ (A costante).

Per determinare il valore della costante A si può osservare che, per $t=0$, si deve avere ovviamente $Q(0)=1$, perchè possiamo assumere come certo il fatto che all'istante $t=0$ non sia avvenuto alcun evento elementare. Quindi la espressione della funzione Q è:

(7) $Q(t) = \exp(-k\cdot t).$

L'evento opposto a questo si verifica ovviamente se nel periodo tra 0 e t si verifica almeno un evento elementare; indichiamo con $P(t)$ la sua probabilità, che è data da:

(8) $P(t) = 1 - Q(t) = 1-\exp(-k\cdot t).$

La derivata della funzione (8) è:

(9) $P' = k\cdot\exp(-k\cdot t)$

e può essere considerata dunque come una densità di probabilità; utilizzando le espressioni poco precise di cui abbiamo detto nel Cap. XIII, si usa dire che la espressione:

(10) $P'dt= k\cdot\exp(-k\cdot t)\cdot dt$

fornisce la "probabilità infinitesima" che il primo evento si verifichi tra gli istanti t e t+dt.

In corrispondenza con questi sviluppi, si può considerare la t, soddisfacente alla (1), come una variabile aleatoria continua, la cui funzione di distribuzione è la P', data dalla (9). La variabile t viene anche chiamata "tempo d'attesa" del primo evento elementare.

2 - Il problema trattato poco fa può essere ulteriormente generalizzato: infatti, indicato con r un numero naturale, ci si può domandare di valutare la probabilità che nel periodo tra 0 e l'istante t avvengano esattamente r eventi elementari. Tale probabilità sarà indicata col simbolo:

(11) $$P(r,t),$$
e potremo quindi porre:

(12) $$P(1,t) = P(t) = 1-\exp(-k\cdot t).$$
La espressione della funzione (11) può essere determinata rifacendosi agli sviluppi del Cap. VII. A tal fine consideriamo il periodo di tempo compreso tra 0 e t+α, essendo α un periodo che può essere considerato come "breve", nel senso che abbiamo precisato sopra. L'evento che consiste nel verificarsi, in tale periodo, di r+1 eventi elementari può essere visto come la somma logica di due eventi: uno di essi è il verificarsi di r+1 eventi elementari nel periodo da 0 a t, e di nessun evento cosiffatto nel breve periodo di durata α, successivo all'istante t, l'altro il verificarsi di r eventi elementari nel periodo tra 0 e t, e di un evento elementare nel breve periodo di durata α, successivo all'istante t. Tali due eventi sono ovviamente incompatibili, e sarà quindi valida la relazione:

(13) $$P(r+1,t+\alpha) = P(r+1,t)(1-k\cdot\alpha) + P(r,t)\cdot k\cdot\alpha.$$
Se, anche in questo caso, supponiamo che la funzione (11) sia dotata di derivata, ed indichiamo quest'ultima con il simbolo P'(r,t), dalla (13), passando al limite per α-->0 si ottiene l'equazione:

(14) $$P'(r+1,t) = -k\cdot P(r+1,t) + k\cdot P(r,t).$$
La (14) fornisce un sistema ricorrente di equazioni differenziali lineari, una per ogni valore del naturale r.
La soluzione della (14) si può ottenere con le procedure abituali; infatti si può porre:

(15) $$P(r,t) = g(r,t)\ \exp(-k\ t),$$
essendo g(r,t) una opportuna funzione che si determina con procedura ricorrente, calcolando le derivate, sostituendo nella (14), e tenendo conto della (12).
Eseguendo i calcoli, che non offrono difficoltà concettuali, si ottiene:

(16) $$P(r,t) = [(kt)\hat{}r]\cdot\exp(-k\cdot t)/r!.$$

In base alle premesse esposte, questa funzione di t dà la valutazione della probabilità che il tempo di attesa perché si producano r eventi elementari sia t.

3 - Un altro esempio classico di applicazione della schema della continuità nell'ambito della proabilità è fornito dalla distribuzione che viene abitualmente chiamata "gaussiana", dal nome del grande matematico tedesco C.F. Gauss [Carlo Federico Gauss. 1777-1855],che per primo ne diede la formulazione nei termini che ancora oggi vengono spesso adottati.

Adottiamo anche in questo caso la nomenclatura introdotta nel precedente Cap. XIII; indichiamo con x una variabile aleatoria continua e con f(x) la funzione di distribuzione, in modo che la valutazione della probabilità che la variabile assuma un valore compreso tra x ed x+dx, sia data da:

(17) $$f(x)\cdot dx.$$

Nel caso della distribuzione gaussiana si ha:

(18) $$f(x) = k\cdot \exp[-k^2x^2]/[\pi\hat{}\tfrac{1}{2}]; \qquad (k>0).$$

La costante positiva che figura nella (18) viene chiamata spesso "precisione", per ragioni che si comprenderanno in seguito, quando avremo ricordato le circostanze nelle quali si giunse alla formulazione (18).

La funzione di ripartizione corrispondente alla (18) , cioè la :

(19) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\cdot du$$

è positiva e crescente per ogni valore reale di x, e si ha :

(20) $$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} F(x) = 1.$$

La rappresentazione grafica della funzione (18) in coordinate cartesiane ortogonali, in cui x indichi l'ascissa e f(x) sia il corrispondente valore dell'ordinata, è un curva simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, che ha l'asse delle ascisse come asintoto, e possiede una tipica forma "a campana", che a volte viene utilizzata per richiamare la funzione (18).

Per le applicazioni sono particolarmente importanti i valori dati dalle formule seguenti:

(21) $$M(|x|) = 2\cdot[\pi\hat{}(-\tfrac{1}{2})]\cdot\int_{0}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot dx = [\pi\hat{}(-\tfrac{1}{2})]\cdot(1/k).$$

$$(22)\qquad \sigma^2 = M(x^2) = 2\cdot k\cdot[\pi\hat{}(-\tfrac{1}{2})]\int_0^{+\infty} x^2\cdot f(x)\cdot dx = 1/(2\cdot k^2).$$

La funzione di ripartizione $F(x)$ data dalla (19) non è esprimibile mediante un numero finito di operazioni su funzioni abitualmente ritenute elementari (funzioni razionali, radicali, trascendenti elementari, cioè logaritmo, esponenziale, funzioni trigonometriche). Pertanto i risultati espressi dalle formule (20), (21), (22) richiedono l'impiego di accorgimenti di calcolo che non rientrano in quelli elementari, abitualmente insegnati nei corsi elementari di analisi matematica.

Nel caso particolare in cui sia:

$$(23)\qquad 2\cdot k^2 = 1$$

la funzione (18) viene espressa da :

$$(18a)\qquad f(x) = [(2\cdot\pi)\hat{}(-\tfrac{1}{2})]\cdot\exp(-x^2/2);$$

la distribuzione di probabilità data dalla (18a) viene anche spesso chiamata "normale" e la funzione stessa viene chiamata "legge normale" della probabilità, per ragioni in parte storiche.

Per la espressione della funzione di ripartizione della (18a) valgono ovviamente le stesse osservazioni che abbiamo espresso poco fa a proposito della funzione (18); tuttavia i valori numerici di questa funzione di ripartizione sono stati tabulati, in vista dell'importanza delle applicazioni che ne vengono fatte alla pratica, come vedremo presto.

4 - Il problema iniziale, da cui hanno preso origine le ricerche di Gauss, viene abitualmente ricordato come "problema degli errori di osservazione" e corrispondentemente si suol dire che la (18) esprime la "legge degli errori".

Il problema in parola potrebbe venire formulato, in modo approssimato ma suggestivo, nel modo seguente: si supponga di misurare ripetutamente una grandezza fisica; è ben noto che, ripetendo la stessa misura, si ottengono generalmente dei numeri diversi, anche adottando sempre scrupolosamente la stessa procedura e la stessa tecnica. Si pone quindi il problema di determinare il valore più plausibile della la misura della grandezza che si considera; la procedura indicata da Gauss si fonda sulla ipotesi che abbia senso parlare di una misura "vera, giusta", che rappresenti in modo esatto la grandezza considerata. Da questa ipotesi segue l'impostazione data da Gauss al problema, impostazione secondo la quale la diversità delle misure ottenute con le tecnica adottate è dovuta alla presenza di "errori di osservazione", che ogni operatore commette senza volere, ma che sono presenti in ogni operazione di misura.

Siano :

$$(24)\qquad a(i)\ ;\qquad (1\le i\le n)$$

i valori numerici delle misure eseguite. Indichiamo con m la media dei numeri (24), ponendo quindi:

(25) $$m = [\Sigma a(i)]/n \quad (1 \le i \le n);$$
indichiamo con x(i) gli scarti delle misure (24) dalla media m, ponendo quindi:

(26) $$x(i) = a(i)-m.$$
I numeri (26) vengono ora considerati come i valori di una variabile aleatoria continua, e, in conformità con le ipotesi da cui siamo partiti, vengono chiamati "errori di osservazione".

La funzione di distribuzione f(x) della variabile aleatoria considerata, e la corrispondente funzione di ripartizione F(x), date dalle (18) e (19), possono essere determinate in forza di certe opportune ipotesi, che sono dettate da considerazioni intuitive, riguardanti la struttura della realtà fisica e le proprietà della operazione di misura.

Presenteremo qui delle ipotesi che sono sufficienti per giungere alla determinazione della forma analitica classica della funzione considerata.

A) Gli scarti (26) sono indipendenti tra loro;

B) Se gli scarti (26) sono abbastanza numerosi ed abbastanza piccoli, il valore della misura della grandezza a cui compete il valore massimo della funzione di distribuzione di probabilità degli scarti è la media (25); quindi la funzione f(x) deve avere il suo massimo per x=0.

Si osserva facilmente che queste ipotesi non ammettono una formulazione precisa che sia valida in generale: vale infatti anche in questo caso ciò che è già stato osservato esplicitamente varie volte, ed in particolare nel Cap.IX, a proposito delle espressioni del tipo "numero grande" e "numero piccolo". Pertanto la validità delle espressioni matematiche adottate è legata alla stima soggettiva dell'operatore, il quale deve giudicare, caso per caso, in quale misura i fenomeni che egli sta osservando, e le misure che egli esegue, possano rispondere alle ipotesi teoriche astratte formulate da Gauss per la deduzione delle espressioni delle leggi matematiche in parola. Analoghe precauzioni valgono, a maggior ragione, per le deduzioni che si possano eventualmente trarre dalle schematizzazioni matematiche dei fenomeni osservati.

Il problema originale da cui la teoria è nata, e le sue applicazioni, giustificano le denominazioni classiche (ancora oggi spesso adottate) che vengono date ai numeri che entrano nella (21) ; infatti nella interpretazione relativa alla teoria degli errori, il numero $M(|x|)$, valore medio della variabile $|x|$, viene chiamato "errore medio"; si suole osservare infatti che la valutazione della probabilità che un errore sia, in valore assoluto, minore di $M(|x|)$ è $\frac{1}{2}$. In forma più grossolana le cose vengono presentate dicendo che "in pratica", quando le osservazioni sono molto numerose, la metà circa degli errori è costituita da errori minori in modulo di $M(|x|)$; e ciò giustifica anche il nome di "precisione" che viene dato alla costante k, e che abbiamo presentato sopra, nel paragrafo 3. Infatti, dalla (21) si trae che, al crescere di k, tende a zero la lunghezza dell'intervallo entro il quale sono raggruppate la metà delle osservazioni affette da errore.

5 - La distribuzione di Gauss, data dalla (18), ha una grandissima importanza per le scienze sperimentali e per la statistica. Infatti dalla teoria sviluppata dal Gauss ha preso origine tutta una serie di ricerche teoriche, che hanno condotto alla dimostrazione di alcuni teoremi di importanza fondamentale per il calcolo delle probabilità e la statistica teorica. Le dimostrazioni di questi teoremi non potrebbero trovare posto in una esposizione elementare come la presente; anche la loro enunciazione rigorosa e precisa richiederebbe degli sviluppi che qui non possiamo dare. Ci limiteremo quindi ad una presentazione approssimata e suggestiva, atta a dare l'idea del significato e della portata dei teoremi stessi. Uno dei teoremi in parola viene chiamato "teorema centrale limite del calcolo delle probabilità"; esso potrebbe essere enunciato, in forma - ripetiamo - approssimata ma suggestiva, dicendo che se una variabile aleatoria può essere considerata come la somma di moltissime variabili casuali indipendenti ognuna delle quali è molto piccola ed ha come valore medio lo zero, allora la variabile casuale somma è distribuita secondo la legge normale .

La mancanza di precisione e di rigore nell'enunciato che abbiamo dato consiste nella mancata precisazione del senso delle espressioni quali "moltissime" e "molto piccola". Tuttavia abbiamo voluto presentare l'enunciato per mettere in evidenza il legame tra il teorema centrale limite e la teoria degli errori: appare infatti molto ragionevole il ritenere che un errore di osservazione, quando l'operatore abbia messo molta cura nella operazione di misura, sia dovuto a moltissime cause quasi ignote, ma tali che ognuna di esse ha un'influenza molto piccola; ed ancora, appare molto accettabile che le misure così eseguite abbiano lo zero come media degli errori che si commettono (positivi e negativi rispetto a quella che si presume la misura "vera") della grandezza in esame.

Queste osservazioni, ed altre che si potrebbero aggiungere, rendono molto ragionevole il comportamento di coloro i quali, dovendo ricercare la legge di distribuzione di una variabile aleatoria (o di più variabili cosiffatte), adottano la legge normale come ipotesi di partenza, rimanendo tuttavia sempre disposti a cercare altre espressioni se la realtà non conferma le ipotesi di partenza, per quanto ragionevoli esse possano apparire ad un primo esame.

Questo atteggiamento è stato qualificato dal grande matematico e probabilista italiano Bruno De Finetti com l'appellativo di "serendipità"; termine che vorrebbe indicare la qualità del ricercatore che è disposto a registrare ogni fenomeno interessante, ed a cambiare la propria spiegazione teorica quando la realtà lo richieda.

INDICE ANALITICO

(i numeri scritti dopo ogni voce indicano rispettivamente il capitolo ed il paragrafo del capitolo stesso).

60

INDICE